بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه‌ای بر
مکانیک محیط‌های پیوسته

مؤلفین

مایکل لی، دیوید رابین، ارهارد کرمپل

مترجم

دکتر غلامحسین رحیمی شعرباف

۱۳۷۲

انتشارات دانشگاه تربیت مدرس

دانشگاه تربیت مدرس

عنوان : مقدمه‌ای بر مکانیک محیطهای پیوسته

مؤلفین : مایکل لی ، دیوید رابین ، ارهارد کرمپل

مترجم : دکتر غلامحسین رحیمی شعرباف

ویراستار ادبی : محمد حسین صبور

ناشر : انتشارات دانشگاه تربیت مدرس

شماره انتشار : ۱۵

تاریخ انتشار : ۱۳۷۳

نوبت چاپ : اول

تیراژ : ۳۰۰۰

حروف‌چینی : رضوی، آرایه

چاپ : **شرکت ایرانچاپ، موسسه اطلاعات**

قیمت ۳۰۰۰ ریال

مرکز پخش : تهران ، تقاطع بزرگراه آل احمد و بزرگراه دکتر چمران، دانشگاه تربیت مدرس، مرکز نشر
صندوق پستی ۴۸۳۸-۱۴۱۵۵ ، تلفن : ۸۰۰۶۶۳۴ ، فاکس : ۸۰۰۶۵۴۴

فهرست

فصل ۳ سینماتیک محیطهای پیوسته

فصل ٦ سیال چسبنده نیوتنی

فصل ۷ فرمول بندی انتگرالی اصول عمومی

فصل ۸ سیال ساده تراکم ناپذیر

بسمه تعالی

پیشگفتار مترجم:

علمای ما، مکانیک را در معنای عام (که مشتمل بر صنعت نیز می‌شود) "علم الحیل" نام نهاده بودند، اما امروزه، مکانیک شاخه‌ای از علم محسوب می‌شود که به مطالعه حرکت اجسام و مسبب آن، یعنی نیرو می‌پردازد. از این رو، مکانیک به معنای اعم، مبتنی بر مفاهیمی نظیر زمان و فضا - برای تعیین "حرکت" -، ماده، جرم و مکان - برای معرفی "جسم مادی" -، نیرو و انرژی - برای بیان علت حرکت - استوار است. مکانیک نیز نظیر هندسه، باید از تعدادی مفاهیم اساسی (که با مسامحه تعریف و اغلب بصورت بدیهی پذیرفته می‌شوند)، آغاز شده، سپس توسعه یابد. بهر حال محور اصلی دانش مکانیک، مطالعه اشیای فیزیکی، یعنی اجسام مادی و میدانها است. اجسام مادی، اجسام با خاصیت لختی یا ماند [1] می‌باشند، و این خاصیت، ناشی از جرم آنهاست.

مکانیک، علمی است قدیمی و کلاسیک. طبیعت کلاسیک مکانیک نشانه وسعت آن می‌باشد، از این رو مطالعه تمامی ابعاد آن، کاری است بس عظیم. دانش مکانیک برای مطالعه تمامی شاخه‌های فیزیک و شیمی و حتی رشته‌هایی نَظیر بیولوژی لازم است.

بر عناصر اولیه مکانیک - جسم، حرکت و نیرو - قوانین و فرضیاتی حاکم‌اند، که آن را به صورت یک واحد کلی توصیف می‌کنند. در مکانیک نظری، حرکات نقاط مادی و یا دستگاه نقاط مادی و اجسام کاملاً صلب مطالعه می‌شوند. اما در مکانیک *محیطهای* پیوسته، حرکات اجسام مادی شکل‌پذیر

---

1 - Intertia

(که به طور پیوسته فضای مورد نظر را پر کرده و فواصل بین ذرات آن در خلال حرکت تغییر می‌کند) بررسی می‌شود. در مکانیک محیطهای پیوسته، همیشه اصل بقای ماده (این که ماده نه خلق و نه نابود می‌شود) حاکمیت تام و تمام دارد (از اثرات نسبیتی صرفنظر می‌شود).

مکانیک محیطهای پیوسته، یک شاخهٔ وسیع از مکانیک محسوب می‌شود. هدف این شاخهٔ علمی، فراگیری این واقعیت است که چگونه مسائل مربوط به حرکت اجسام شکل پذیر - جامد، مایع و گاز - صورتبندی و سئوالات و ایده‌های کلی و حتی مبهم به عبارات دقیق ریاضی بدل شوند. در این بخش از علم مکانیک، حوزه‌های مختلف مطالعه (که تحت عنوان درس یا شاخه علمی متفاوت و منفک از یکدیگر در رشته‌های مربوط مطرح‌اند) به یکدیگر پیوند خورده، با ایده وحدت بخشی، مجموعه‌ای واحد و یکپارچه را به وجود می‌آورند.

امروزه در اکثر دانشگاه‌ها، در رشته‌های مهندسی مکانیک، سازه، هوا-فضا، کشتی، خاک، درس مکانیک محیطهای پیوسته در ابتدای دوره کارشناسی ارشد ارائه می‌شود و حتی در برخی از دانشگاهها، این درس برای دانشجویان دوره کارشناسی ارائه می‌شود و عقیده بر آن است که بایستی به تدریج مکانیک محیطهای پیوسته را جایگزین دروس مکانیک جامدات، مکانیک سیالات، انتقال حرارت و ترمودینامیک نمود.

در زمینه مکانیک محیطهای پیوسته، کتب متعددی تدوین شده که در انتهای ترجمه کتاب به تعدادی از آنها اشاره شده است. انتخاب کتاب حاضر برای ترجمه، به دو علت اساسی صورت پذیرفته است. نخست این که سادگی در بیان مطالب، تقسیم بندی مناسب موضوعات، ارائه مثالهای متعدد برای تفهیم مطلب و گردآوری مسائل زیاد در انتهای هر فصل، کتاب را برای کلاس درس کاملا مناسب نموده است. دوم این که با توجه به معرفی تانسورهای مرتبه دو از طریق تشریح تبدیلات خطی، به فهم مبادی ریاضی متن که یکی از پیچیدگیهای مکانیک محیطهای پیوسته محسوب می‌شود، سادگی و سهولت خاصی بخشیده است. از این رو به اعتقاد مترجم، اکثر محتوای این کتاب برای تدریس در دوره‌های کارشناسی نیز مناسب است، همچنین عمده مطالب کتاب را دانشجویان سال آخر و فارغ التحصیلان بدون کلاس درس می‌توانند مورد استفاده قرار دهند.

در ترجمهٔ کتاب سعی شده که اصطلاحات معمول و مورد استفاده در دانشگاهها به کار گرفته شود. برای واژه‌هایی که از معادل مشهوری برخوردار نبوده‌اند، بیشتر از لغات معرفی شده انتخابی استفاده شده

و واژه متناظر انگلیسی، در همان صفحه درج شده است. در تایپ متن، بردارها و تانسورها توسط حروف برجسته (پررنگ) مشخص شده‌اند.

مترجم این کتاب از کلیه همکارانی که در ترجمه و انتشار این مجموعه سهمی داشته‌اند، سپاسگزاری می‌نماید. به‌ویژه از استاد گرامی جناب آقای دکتر اسلامی که نظرات پرارزشی را ارائه داده‌اند، صمیمانه قدردانی می‌کند. همچنین از جناب آقای مهندس موسوی که ویرایش ادبی متن را عهده‌دار بوده‌اند، کمال تشکر را دارد. اینجانب از همکاران گرامی در مرکز انتشارات دانشگاه تربیت مدرس که زحمت حروفچینی، صفحه‌آرایی و در نهایت چاپ کتاب را تقبّل نموده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم. از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تربیت مدرس، برادر ارجمند جناب آقای دکتر فلاحی و دیگر همکاران ایشان که موجبات چاپ این ترجمه را فراهم نموده‌اند، متشکرم.

امیدوارم که صاحبنظران بر اینجانب منّت نهاده و نارسائیها و اشکالات وارد بر ترجمه را اطلاع دهند، تا انشاا... در فرصتهای بعدی از آن استفاده شود.

در پایان شکرگزار خداوند متعال هستم که توفیق ترجمهٔ این کتاب را به این بندهٔ ناچیز اعطا فرمود.

من ا... التوفیق و علیه‌التکلان

بخش مکانیک - دانشگاه تربیت مدرس

غلامحسین رحیمی

آذر ماه ۱۳۷۲

پیشگفتار

هدف متن حاضر، معرفی مفهوم مکانیک محیطهای پیوسته، برای مبتدیان در این حوزه است. در ارائهٔ مطلب، توجه و دقت کافی مبذول شده تا کتاب در چارچوب فهم و درک خوانندگانی باشد که زمینه خوبی در ریاضیات تاحدودی معادلات دیفرانسیل، و نیز مکانیک اجسام صلب داشته باشند. بنا به دلایل آموزشی، پوشش موضوع کمتر از آن است که کامل گفته شود، بلکه محتوای کتاب تنها برای فهم بهتر دروس پیشرفته‌تر بعدی در شاخه‌های مختلف مکانیک محیطهای پیوسته و حوزه‌های مربوطه کفایت می‌کند. بخش اعظم محتوای کتاب، به طور موفقیت آمیزی در انیستیتوی پلی‌تکنیک رنسلر[۲] برای دانشجویان دوره لیسانس (کارشناسی) در کلاس درس تدریس شده است. بهر حال مولفان معتقدند که متن حاضر برای شروع دوره فوق لیسانس (کارشناسی ارشد) در مکانیک محیطهای پیوسته نیز می‌تواند مناسب باشد.

چند کلمه‌ای پیرامون فصل دوم. این فصل تانسورهای مرتبه دو را به عنوان تبدیلات خطی بردارها در فضای سه بعدی معرفی می‌کند. تجربه‌های آموزشی ما اثبات نموده است که مفهوم تبدیل خطی موثرترین شیوه برای معرفی موضوع است. این فصل به لحاظ محتوا، کامل و خودکفا است، به طوریکه اطلاعات قبلی از تبدیلات خطی لازم ندارد، هرچند که دانستن آن مفید خواهد بود. تانسورهای مرتبه سه و بالاتر، از طریق تعمیم قوانین تبدیل برای تانسور مرتبه دو معرفی می‌شوند. هر جاکه نیاز به اختصار

---

2 - Rensselaer Polytechnic Institute

معادلات باشد، از نمادگذاری شاخصی استفاده می‌شود. ماتریسها، برای انجام عملیات محاسباتی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای کسانی که با ماتریسها آشنا نیستند، ضمیمه‌ای در انتهای کتاب آورده شده است.

اجازه دهید که چند کلمه‌ای نیز پیرامون ارائه اصول اساسی فیزیک محیطهای پیوسته بگوئیم. هردو فرمول‌بندی دیفرانسیل و انتگرال از این اصول ارائه می‌شود. فرمول‌بندی‌های دیفرانسیل در فصلهای ۳، ۴ و ۵ (جایی که کمیات در فرمول‌بندی مورد نیازند) و فرمول‌بندی‌های انتگرال در فصل ۷ ارائه شده است. این عمل به دلیل سهولت فهم صورت پذیرفته است: فرمول‌بندی انتگرال بدان گونه که ارائه شده برای فرد مبتدی، کمی به ریاضیات پیشرفته نیاز دارد، لذا اگر تأثیری در متن اصلی نگذارد، می‌توان آن را به تعویق انداخت یا کلا حذف نمود.[۳]

۳ در متن، پاراگراف آخر به ذکر برخی اسامی برای قدردانی اختصاص یافته که در این جا حذف شده است. م

بسمه تعالی

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ - نظریه محیط پیوسته

ماده، متشکل از مولکولهایی است که خود مشتمل بر اتمها و ذرات درون اتمی می‌باشند. بنابراین ماده پیوسته نیست. در هر صورت، جنبه‌هایی از تجربه روزانه در ارتباط با رفتار مواد وجود دارد، نظیر مقدار افزایش طول یک میله فولادی تحت اثر نیرو، میزان تخلیه آب در یک لوله تحت فشار معین یا نیروی مقاومی که جسم در خلال حرکت در هوا با آن مواجه می‌شود و غیره، که می‌توانند بدون توجه به ساختمان مولکولی مواد توصیف و پیش بینی شوند. نظریه‌ایکه به توصیف روابط بین پدیده‌های بزرگ و حجیم صرف‌نظر از ساختمان ماده در مقیاس خرد - می‌پردازد به عنوان نظریه محیط پیوسته[۴] شناخته می‌شود. لذا در این نظریه، فرد، ایده یک حجم بی‌نهایت کوچک از مواد را به عنوان یک ذره در محیط پیوسته تلقی می‌کند. حال، خواه نظریه محیط پیوسته توجیه پذیر باشد یا نباشد، وابسته به موقعیت داده شده است. به عنوان مثال، در حالی که نظریه محیط پیوسته به اندازه کافی رفتار فولاد را در بسیاری از شرایط توصیف می‌کند، اما در انتشار امواج با طول موجهای بسیار کوتاه - در فولاد - نتایج منطبق و سازگار با مشاهدات تجربی به دست نمی‌دهد. از سوی دیگر، ممکن است یک گاز رقیق، در شرایطی خاص، به نحو مکفی و مناسب به صورت یک محیط پیوسته توصیف شود. در هر صورت، توجیه نظریه

---

4 - continuum theory

محیط پیوسته، مبتنی بر تعداد ملکولها در حجم داده شده، گمراه کننده خواهد بود. به خصوص این که یک حجم بی‌نهایت کوچک، در نهایت اصلا ملکولی نخواهد داشت. هرگز لازم نیست که کمیتهای مطرح در نظریه محیط پیوسته، به عنوان معدلهای آماری خاص تفسیر شوند. در حقیقت، امروزه دریافته‌اند که به معادله واحدی برای یک محیط پیوسته (مبتنی بر فرضیه‌های متفاوت ساختمان ملکولی و تعریف متغیرهای کلان) می‌توان دست یافت. در حالی که نظریه آماری ملکولی (اگر در دسترس باشد) صرفاً فهم نظریه محیط پیوسته را توسعه می‌بخشد. اما این که نظریه محیط پیوسته در یک موقعیت خاص، اثبات پذیر می‌باشد، مربوط به آزمایش تجربی است و نه فلسفه. کافی است گفته شود که صدها سال آزمایشهای مختلف چنین نظریه‌ای را در موقعیتهای گوناگون و گسترده تأیید کرده‌اند.

۱-۲ - محتوای مکانیک محیطهای پیوسته

مکانیک محیطهای پیوسته، واکنش مواد را نسبت به شرایط مختلف بارگذاری مطالعه می‌کند. موضوع آن را به دو بخش اصلی می‌توان تقسیم نمود: (۱) اصول عمومی، که برای تمامی محیطها مشترک است و (۲) معادلات بنیادین که مواد ایده‌آل شده را تعریف می‌کند. اصول عمومی[۵] قضایایی هستند که مبتنی بر تجربیات ما با جهان فیزیکی، بدیهی فرض می‌شوند، نظیر بقای جرم، اصل اندازه حرکت خطی، اصل ممان اندازه حرکت، بقای انرژی، اصل آنتروپی، بقای بارهای الکتریکی، شار مغناطیسی و غیره. در متن حاضر که در وحله اول برای مبتدیان در موضوع طراحی شده، خود را به موقعیتهایی محدود می‌کنیم که تنها به چهار اصل اول نیاز دارند. به لحاظ ریاضی دو شکل از اصول عمومی وجود دارند: (۱) شکل انتگرالی، که در آن، اصول برای یک حجم محدود ماده در محیط پیوسته، فرمول‌بندی می‌شود و (۲) معادلات میدانی، که برای یک حجم بی‌نهایت کوچک (دیفرانسیل حجم) ماده (ذره) در هر نقطه از میدان مورد نظر، قالب‌بندی می‌شود. معادلات میدان، اغلب از شکل انتگرالی استخراج می‌شوند. به نظر می‌رسد که شیوه دوم برای مبتدیان بهتر است. در این متن هر دو روش ارائه شده و شکل انتگرالی در انتهای متن بیان می‌گردد. هرگاه تغییرات متغیرهای میدان - در

5 - general principles

میدان مربوطه - به عنوان متغیر مورد نظر باشند و یا برای یافتن اطلاعات لازم موردنیاز باشد، معادلات میدان اهمیت خواهند یافت. از سوی دیگر، از شکل انتگرالی قوانین بقا به سادگی می‌توان برای حل تقریبی سود جست.

عمده بخش دوم نظریه مکانیک محیطهای پیوسته، مربوط به معادلات بنیادین[۶] است، که برای تعریف مواد ایده‌آل شده به‌کار گرفته می‌شود. مواد ایده‌آل شده[۷] وجوه خاصی از رفتار مواد طبیعی را نشان می‌دهند. به عنوان مثال، برای بسیاری از مواد تحت شرایط خاص و محدود، تغییر شکل ناشی از اعمال نیروهای خارجی، با حذف نیروها از بین می‌رود. این وجه از رفتار ماده، توسط معادله بنیادین یک جسم الاستیک تبیین می‌شود. حتی تحت شرایط محدودتر، حالت تنش در یک نقطه به طور خطی وابسته است به تغییرات طول و زوایه متقابل ایجاد شده در المانها، در نقطه‌ای که نسبت به حالت بدون اعمال نیروهای خارجی مقایسه می‌شود. عبارت فوق جسم جامد الاستیک خطی را تعریف می‌کند. مثال دیگر توسط تعریف کلاسیک چسبندگی[۸] ارائه می‌شود و مبتنی بر این فرض است که حالت تنش، به طور خطی وابسته به نرخ لحظه‌ای تغییر طول و زاویه متناظر می‌باشد. چنین معادله بنیادینی سیال چسبنده خطی را تعریف می‌کند. رفتار مکانیکی مواد واقعی نه تنها از یک ماده به ماده دیگر، بلکه با شرایط بارگذاری متفاوت برای یک ماده داده شده نیز تغییر می‌کند. این امر منجر به فرمول‌بندی معادلات بنیادین متعددی (که مبین وجوه متفاوت رفتار ماده است) می‌شود. در خلال دو دهه گذشته، تئوری معادلات بنیادین، به صورت قابل توجهی به سوی تعمیم و تجرید توسعه یافته است. در این متن مقدماتی، به طور کلی از بحث پیرامون نظریه معادلات بنیادین خودداری کرده، سه مدل ایده‌آل را ارائه می‌کنیم و با حل مسائل ساده مقادیر مرزی، به بررسی رفتاری که آنها از خود نشان می‌دهند، می‌پردازیم. به طور مشخص‌تر، مواد ایده‌آل انتخابی عبارتند از (۱) اجسام جامد الاستیک خطی (۲) سیال چسبنده خطی شامل سیال غیر چسبنده و (۳) سیال تراکم ناپذیر ساده در سیلانهای ویسکومتریک[۹]. یکی از ملزومات

6- constitutive equations

7 - idealized materials

8 - viscosity

9 - viscometric

مهمی که باید به وسیله تمام کمیتهایی که در فرمول‌بندی یک قانون فیزیکی به کار می‌روند ارضا شود، این است که باید نسبت به مختصات، پایا[10] باشند. ما در فصل بعد پیرامون چنین کمیاتی به بحث خواهیم پرداخت.

10 - invariant

فصل ۲

تانسورها

بدان گونه که در مقدمه اشاره شد، تمامی قوانین مکانیک محیطهای پیوسته باید بر حسب کمیاتی صورت بندی شوند که مستقل از مختصات باشند. لذا هدف این فصل، معرفی این عناصر ریاضی است. ما این فصل را با معرفی نمادگذاری اختصاری یعنی نمادگذاری شاخصی در بخش الف آغاز خواهیم کرد، و متعاقب آن، مفهوم تانسور به عنوان یک تبدیل خطی در بخش ب معرفی خواهد شد.

بخش الف - نمادگذاری شاخصی[1]

۲ الف ۱ - قرارداد جمع، شاخصهای کاذب

جمع زیر را در نظر بگیرید:

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n. \qquad \text{(الف ۱)}$$

معادله فوق را می‌توان با استفاده از علامت جمع، به شکل فشرده نوشت:

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i. \qquad \text{(الف ۲)}$$

1- indicial notation

واضح است که معادلات زیرین، دقیقاً هم معنای معادله (الف ۲) می‌باشند:

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \tag{الف ۳}$$

$$s = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m, \tag{الف ۴}$$

و غیره.

شاخص i درمعادله(الف ۲)، یا j در معادله (الف ۳)، یا m در معادله (الف ۴) یک شاخص کاذب[۲] است، بدین معنی که جمع، از حرف به کار برده شده، مستقل است.

صورت معادله (الف ۱) را با قرارداد زیر می‌توانیم بیشتر ساده کنیم: هرگاه شاخصی یک بار تکرار شود، یک شاخص کاذب و مبین جمع روی شاخص با حوزه تغییر اعداد صحیح ۱، ۲،...، n می‌باشد.

این قرار داد، به عنوان قرار داد جمع[۳] انیشتین مشهور است. معادله (الف ۱) با استفاده از این قرار داد، به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$s = a_i x_i. \tag{الف ۵}$$

توجه کنید که:

$$a_i x_i = a_m x_m = a_j x_j = \dots . \tag{الف ٦}$$

در این جا بایستی تاکید کرد که عباراتی نظیر $a_i b_i x_i$ در حوزه این قرارداد نمی‌گنجد. یعنی هنگامیکه قرارداد جمع اعمال می‌شود، یک شاخص، هرگز نباید بیش از یک بار تکرار شود. بنابراین عبارتی نظیر

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x_i$$

باید علامت جمع خود را حفظ کند.

برای آنچه در پیش است، همواره n را برابر ۳ برمی‌گزینیم. لذا به عنوان مثال:

$$a_i x_i = a_m x_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$
$$a_{ii} = a_{mm} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

---

2 - dummy index

3 - summation convention

$$a_i\mathbf{e}_i = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

واضح است که قرارداد جمع را می‌توان برای نشان دادن یک جمع دوگانه یا سه‌گانه و غیره به کار گرفت. به عنوان مثال می‌توان عبارت

(الف ۷) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$$

را به صورت ساده زیر نوشت:

(الف ۸) $$a_{ij}x_i x_j.$$

بسط کامل عبارت (الف۸)، جمعی با ۹ جمله[4] را به دست می‌دهد، یعنی

(الف ۹) $$\begin{aligned} a_{ij}x_ix_j = {} & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 \\ & + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3. \end{aligned}$$

احتمالاً برای مبتدیان بهتر آن است که بسط فوق را در دو مرحله انجام دهند، نخست جمع روی i و سپس جمع روی j (ویا بالعکس) یعنی

$$a_{ij}x_ix_j = a_{1j}x_1x_j + a_{2j}x_2x_j + a_{3j}x_3x_j,$$

که

$$a_{1j}x_1x_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3,$$

و غیره.

به طور مشابه جمع سه‌گانه

(الف ۱۰) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_ix_jx_k$$

به سادگی چنین نوشته می‌شود:

(الف ۱۱) $$a_{ijk}x_ix_jx_k.$$

عبارت (الف ۱۱) نشانگر یک جمع با ۲۷ جمله است.

مجدداً تاکید می‌کنیم که عباراتی نظیر $a_{ii}x_ix_jx_j$ یا $a_{ijk}x_ix_ix_jx_k$ در قرار داد جمع، تعریف نمی‌شوند، این عبارات نمایشگر جمعهای زیر نیستند:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ii}x_ix_jx_j \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_ix_ix_jx_k.$$

---

4 - term

۲ الف ۲ - شاخصهای آزاد

دستگاه سه معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \tag{الف ۱۲ الف}$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \tag{الف ۱۲ ب}$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \tag{الف ۱۲ پ}$$

با استفاده از قرارداد جمع، معادلات (۲ ۱ الف) را می‌توان بدینصورت نوشت:

$$x_1' = a_{1m}x_m, \tag{الف ۱۳ الف}$$

$$x_2' = a_{2m}x_m, \tag{الف ۱۳ ب}$$

$$x_3' = a_{3m}x_m, \tag{الف ۱۳ پ}$$

که می‌توان آنها را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$x_i' = a_{im}x_m, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{الف ۱۴}$$

شاخصی که تنها یک بار در هریک از جمله‌های یک معادله - نظیر شاخص i در معادله (الف۱۴) - ظاهر می‌شود "شاخص آزاد"[۵] خوانده می‌شود. شاخص آزاد، در هر زمان یکی از اعداد صحیح ۱، ۲، یا ۳ را می‌پذیرد. بنابراین، معادله (الف۱۴) خلاصهٔ سه معادله‌ای است که هرکدام شامل سه جمله در طرف راست خود می‌باشند [یعنی معادلات (الف،الف ۱۲ و ب و پ)].

رابطه زیر مثال دیگری است:

$$\mathbf{e}_i' = Q_{im}\mathbf{e}_m, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{الف ۱۵}$$

که مبین معادلات زیر است:

$$\mathbf{e}_1' = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{12}\mathbf{e}_2 + Q_{13}\mathbf{e}_3, \tag{الف ۱۵ الف}$$

$$\mathbf{e}_2' = Q_{21}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{23}\mathbf{e}_3, \tag{الف ۱۵ ب}$$

$$\mathbf{e}_3' = Q_{31}\mathbf{e}_1 + Q_{32}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3. \tag{الف ۱۵ پ}$$

توجه شود که j = ۱،۲،۳ ، $x_j'=a_{jm}x_m$ نظیر معادله (الف ۱۴) j = ۱،۲،۳ ، $\mathbf{e}_j'=Q_{jm}\mathbf{e}_m$ نظیر معادله

---

5 - free index

(الف ۱۵) می‌باشد. معادله

$$a_i = b_j$$

بی‌معنا است. *شاخص آزاد* (که در تمامی جملات یک معادله ظاهر می‌شود) باید یکسان باشد. بنابراین معادلات زیر دارای معنی هستند:

$$a_i + k_i = c_i,$$
$$a_i + b_i c_j d_j = 0.$$

چنان‌چه در یک معادله، دو شاخص آزاد ظاهر شود، نظیر

$$T_{ij} = A_{im} A_{jm}, \qquad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \qquad \text{(الف ۱۶)}$$

آن گاه، معادله خلاصه شدهٔ ۹ عبارت خواهد بود. به عنوان مثال، معادله (۱۶ الف) ۹ عبارت را نمایش می‌دهد که هرکدام دارای سه جمله در طرف راست می‌باشند. در حقیقت:

$$T_{11} = A_{1m} A_{1m} = A_{11} A_{11} + A_{12} A_{12} + A_{13} A_{13} \qquad \text{(الف ۱۶ الف)}$$

$$T_{12} = A_{1m} A_{2m} = A_{11} A_{21} + A_{12} A_{22} + A_{13} A_{23} \qquad \text{(الف ۱۶ ب)}$$

$$T_{13} = A_{1m} A_{3m} = A_{11} A_{31} + A_{12} A_{32} + A_{13} A_{33} \qquad \text{(الف ۱۶ پ)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{33} = A_{3m} A_{3m} = A_{31} A_{31} + A_{32} A_{32} + A_{33} A_{33}. \qquad \text{(الف ۱۶ ت)}$$

مجدداً معادلاتی نظیر

$$T_{ij} = T_{ik}$$

فاقد معنی هستند.

۲ الف ۳ - دلتای کرانکر[6]

دلتای کرانکر (که با δ_{ij} نمایش داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases} \qquad \text{(الف ۱۷)}$$

6 - kronecker Delta

یعنی

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0.$$

به عبارت دیگر، ماتریس

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس واحد[7] است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

به موارد زیر توجه کنید:

(الف) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$

(ب) $\delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1,$

$$\delta_{2m} a_m = \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 = a_2, \quad \text{(الف ۱۸)}$$

$$\delta_{3m} a_m = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = a_3.$$

به طور کلی

$$\delta_{im} a_m = a_i$$

(ج) $\delta_{1m} T_{mj} = \delta_{11} T_{1j} + \delta_{12} T_{2j} + \delta_{13} T_{3j} = T_{1j},$

$$\delta_{2m} T_{mj} = T_{2j}, \quad \text{(الف ۱۹)}$$

$$\delta_{3m} T_{mj} = T_{3j},$$

یا به طور کلی

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}. \quad \text{(الف ۲۰)}$$

و به خصوص

$$\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij},$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} \delta_{jn} = \delta_{in},$$

(د) اگر e_1، e_2، e_3 بردارهای یکهٔ عمود بر هم باشند، آن گاه

7 - identity matrix

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \qquad \text{(الف ۲۱)}$$

۲ الف ۴ - نماد جایگشت[8]

نمادی جایگشت (که با ε_{ijk} نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود:

(الف ۲۲)

$\epsilon_{ijk} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ برحسب آنکه i، j، k { یک جایگشت زوج تشکیل دهد / یک جایگشت فرد تشکیل دهد / جایگشتی تشکیل ندهد } نسبت به ۳،۲،۱

یعنی

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

و

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \cdots = 0.$$

توجه کنید که

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}. \qquad \text{(الف ۲۳)}$$

اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ یک دستگاه سه عضوی[9] راستگرد را تشکیل دهند، آن‌گاه

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ و غیره

که می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k. \qquad \text{(الف ۲۴)}$$

حال اگر $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$ باشند، آن‌گاه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i\mathbf{e}_i) \times (b_j\mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_i b_j \epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k,$$

8 - Permutation symbol

9 - triad

یعنی

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k. \quad \text{(الف ۲۵)}$$

اتحاد مفید زیر را می‌توان اثبات نمود (مسأله ۷ الف را نگاه کنید):

$$\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}. \quad \text{(الف ۲۶)}$$

۲ الف ۵ - عملیات با نمادگذاری شاخصی

(الف) جایگزینی[10]

اگر

$$a_i = U_{im} b_m \quad \text{(I)}$$

و

$$b_i = V_{im} c_m, \quad \text{(II)}$$

آن‌گاه برای این‌که b_iهای (II)، را در (I) جایگزین سازیم، نخست شاخص آزاد عبارت (II) را از i به m و شاخص کاذب را از m به حرف دیگری، مثل n تغییر می‌دهیم، به طوری که

$$b_m = V_{mn} c_n. \quad \text{(III)}$$

حال از (I) و (II) عبارت زیر حاصل می‌شود

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n. \quad \text{(IV)}$$

توجه کنید که (IV) مبین سه معادله است که هرکدام شامل ۹ جمله در طرف راست خود می‌باشند.

(ب) ضرب[11]

اگر

$$p = a_m b_m \quad \text{(I)}$$

و

$$q = c_m d_m, \quad \text{(II)}$$

آن‌گاه

$$pq = a_m b_m c_n d_n. \quad \text{(III)}$$

توجه به این نکته مهم است که $pq \neq a_m b_m c_m d_m$. در حقیقت طرف راست عبارت، حتی در قرار داد جمع تعریف نشده است و نیز واضح است که

$$pq \neq \sum_{m=1}^{3} a_m b_m c_m d_m.$$

10 - Substitution

11 - multiplication

چون ضرب داخلی بردارها توزیع پذیر [12] است، لذا اگر $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$ باشند، آن گاه

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_i\mathbf{e}_i)\cdot(b_j\mathbf{e}_j)=a_ib_j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j).$$

به خصوص اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ بردارهای یکهٔ عمود بر هم باشند، آن گاه $\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$ به طوری که

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i=a_jb_j=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

(پ) فاکتورگیری[13]

اگر
$$T_{ij}n_j-\lambda n_i=0, \qquad \text{(I)}$$

با استفاده از دلتای کرانکر می‌توان نوشت:
$$n_i=\delta_{ij}n_j, \qquad \text{(II)}$$

از این رو (I) چنین می‌شود
$$T_{ij}n_j-\lambda\delta_{ij}n_j=0.$$

بنابراین
$$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0.$$

(ت) انقباض[14]

عمل یکسان سازی دو شاخص و سپس جمع آنها را انقباض گویند. به عنوان مثال T_{ii} انقباض T_{ij} می‌باشد
$$T_{ii}=T_{11}+T_{22}+T_{33},$$

و T_{ijj} انقباض T_{ijk} است
$$T_{ijj}=T_{i11}+T_{i22}+T_{i33}.$$

اگر
$$T_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu E_{ij},$$

آن گاه
$$T_{ii}=\lambda\theta\delta_{ii}+2\mu E_{ii}=3\lambda\theta+2\mu E_{ii}.$$

مسائل

الف ۱ – ماتریس زیر داده شده است

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\3&0&3\end{bmatrix},$$

مقادیر زیر را محاسبه کنید: (الف) S_{ii}، (ب) $S_{ij}S_{ij}$، (ج) $S_{jk}S_{jk}$، (د) $S_{mn}S_{mn}$

12 - distributive

13 - Factoring

14 - Contraction

الف ۲ – معین کنید کدامیک از معادلات زیر هم معنای با $a_i=Q_{ij}a_j'$ می‌باشند

(الف) $a_i = Q_{im}a'_m$،

(ب) $a_p = Q_{qp}a'_q$،

(پ) $a_m = a'_n Q_{mn}$.

الف ۳ – ماتریسهای زیر داده شده است:

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [B_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

هم ارزی معادلات شاخص دار و معادلات ماتریسی متناظر را نمایش دهید

(الف) $D_{ji} = B_{ij} \quad [D] = [B]^T$،

(ب) $b_i = B_{ij}a_j \quad [b] = [B][a]$،

(پ) $c_j = B_{ji}a_i \quad [c] = [B][a]$،

(ت) $s = B_{ij}a_i a_j \quad s = [a]^T[B][a]$،

(ث) $D_{ik} = B_{ij}C_{jk} \quad [D] = [B][C]$،

(ج) $D_{ik} = B_{ij}C_{kj} \quad [D] = [B][C]^T$.

الف ۴ – معادله $T_{ij}=\mu E_{ij}+\lambda(E_{kk})\delta_{ij}$ داده شده است، نشان دهید که

$$W = \frac{1}{2}T_{ij}E_{ij} = \mu E_{ij}E_{ij} + \frac{\lambda}{2}(E_{kk})^2$$

و

$$P = T_{ij}T_{ij} = 4\mu^2 E_{ij}E_{ij} + (E_{kk})^2(4\mu\lambda + 3\lambda^2).$$

الف ۵ – ماتریسهای زیر داده شده است:

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [b_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [S_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(الف) اگر $T_{ij}=\varepsilon_{ijk}a_k$ باشد، $[T_{ij}]$ را محاسبه کنید

(ب) اگر $C_i=\varepsilon_{ijk}S_{jk}$ باشد، $[C_i]$ را محاسبه کنید

(ج) اگر $d_k=\varepsilon_{ijk}a_i b_j$ باشد، $[d_i]$ را محاسبه کنید و نشان دهید که این نتیجه نظیر $d_k=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{e}_k$ است.

الف ٦ – (الف) اگر $\varepsilon_{ijk}T_{jk}$ باشد، نشان دهید که $T_{ij}=T_{ji}$

(ب) نشان دهید که $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}=0$

الف ۷ – (الف) ثابت کنید که $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}.$

با انقباض نتیجه قسمت (الف)، نشان دهید که

(ب) $\epsilon_{ilm}\epsilon_{jlm} = 2\delta_{ij},$

(پ) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$

الف ۸ – با استفاده از رابطه مسأله ۷ الف نشان دهید که

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

الف ۹ ـ (الف) اگر $T_{ij}=-T_{ji}$ باشد، نشان دهید که $T_{ij}a_ia_j=0$

(ب) اگر $T_{ij}=-T_{ji}$ و $S_{ij}=S_{ji}$ باشند، نشان دهید $T_{kl}S_{kl}=0$

الف ۱۰ – با فرض $T_{ij}=\frac{1}{2}(S_{ij}+S_{ji})$ و $R_{ij}=\frac{1}{2}(S_{ij}-S_{ji})$ نشان دهید:

$$S_{ij} = T_{ij} + R_{ij},\ T_{ij} = T_{ji},\ \text{و}\ R_{ij} = -R_{ji}.$$

الف ۱۱ – با فرض اینکه $f(x_1, x_2, x_3)$ تابع اختیاری از x_iباشد و $v_i(x_1, x_2, x_3)$ سه تابع از x_i را نشان دهد، با بسط معادلات زیر نشان دهید که این توابع مربوط به فرمولهای متداول حساب دیفرانسیل می‌باشند.

(الف) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}dx_i,$

(ب) $dv_i = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j.$

الف ۱۲ – فرض کنید $det\ |A_{ij}|$ دترمینانی را نشان می‌دهد که عضو سطر iام و ستون jام آن A_{ij} است.

نشان دهید که $\det|A_{ij}| = \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$

بخش ب - تانسورها

۲ ب ۱ - تانسور - یک تبدیل خطی[۱۵]

فرض می‌کنیم $\mathbf{T}$ تبدیلی باشد که هر بردار را به بردار دیگری تبدیل می‌نماید.[۱۶] اگر $\mathbf{T}$، $\mathbf{a}_1$ را به $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{a}_2$ را به $\mathbf{b}_2$ تبدیل کند، داریم:

$$\mathbf{T}\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$$

و

$$\mathbf{T}\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2.$$

اگر $\mathbf{T}$ دارای خواص خطی زیر باشد:

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \mathbf{T}\mathbf{a}_1 + \mathbf{T}\mathbf{a}_2, \qquad \text{(ب ۱)}$$
$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}_1) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a}_1,$$

که $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ دو بردار دلخواه و α یک عدد اختیاری باشد، آن‌گاه $\mathbf{T}$ یک *تبدیل خطی* خوانده می‌شود. $\mathbf{T}$ همچنین یک تانسور مرتبه دوم[۱۷] و یا فقط تانسور نامیده می‌شود.[۱۸]

۲ ب ۲ - مولفه‌های یک تانسور

فرض کنید که $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ به ترتیب بردارهای یکه در جهت محورهای x_1، x_2، x_3 در یک دستگاه مختصات مستقیم‌الخط قائم باشند. مولفه‌های بردار $\mathbf{a}$ در این دستگاه به صورت زیر داده می‌شود:

$$a_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a},$$

$$a_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a},$$

$$a_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a},$$

یعنی

$$a_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}.$$

---

15 - Linear Transformation

۱۶. در تمامی متن حاضر، تنها به تبدیل بردارها از فضای سه بعدی اقلیدسی به همان فضا اکتفا خواهیم نمود.

17 - Second - order tensor

۱۸. گاه عددیها و بردارها را به ترتیب تانسور مرتبه صفر و مرتبه اول می‌گویند، ولو این که بتوان آنها را به صورت‌جبری برحسب قواعد عملیاتی خاص تعریف نمود. مفهوم هندسی عددیها و بردارها (که فرض می‌کنیم دانشجویان با آنها آشنا هستند) برای مقصود ما کفایت می‌کند.

یا معادل آن، ممکن است بردار a را برحسب مولفه‌هایش به صورت زیر نمایش داد.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_i\mathbf{e}_i.$$

اینک تانسور T را در نظر می‌گیریم. برای هر بردار a، b=Ta برداریست که با رابطه زیر:

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ta} = a_1\mathbf{Te}_1 + a_2\mathbf{Te}_2 + a_3\mathbf{Te}_3 = a_i\mathbf{Te}_i, \qquad (\text{ب ۲})$$

داده می‌شود

که از تعریف یک تبدیل خطی استفاده شده است.

مولفه‌های b به این صورت خواهند بود:

$$\begin{aligned} b_1 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{Te}_1 + a_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{Te}_2 + a_3\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{Te}_3,\\ b_2 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2 = a_1\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{Te}_1 + a_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{Te}_2 + a_3\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{Te}_3,\\ b_3 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_3 = a_1\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{Te}_1 + a_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{Te}_2 + a_3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{Te}_3, \end{aligned} \qquad (\text{ب ۳ الف})$$

یعنی

$$b_i = a_j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{Te}_j. \qquad (\text{ب ۳ ب})$$

مولفه‌ها یا جملاتی نظیر $\mathbf{e}_1.\mathbf{Te}_1$ و $\mathbf{e}_2.\mathbf{Te}_1$ فقط مولفه‌های $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ از $\mathbf{Te}_1$ می‌باشند. توافق می‌کنیم که این مولفه‌ها را به صورت $T_{12}=\mathbf{e}_1.\mathbf{Te}_2$ ،$T_{21}=\mathbf{e}_2.\mathbf{Te}_1$ ،$T_{11}=\mathbf{e}_1.\mathbf{Te}_1$ بنویسیم. و یا به طور خلاصه:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{Te}_j. \qquad (\text{ب ۴})$$

T_{ij} را مولفه‌های تانسور T می‌نامیم. حال، به لحاظ معادلات (ب ۳) و (ب ۴)، معادله برداری $\mathbf{b}=\mathbf{Ta}$ را می‌توان به شکل مولفه‌ای نوشت:

$$\begin{aligned} b_1 &= T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3,\\ b_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3,\\ b_3 &= T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3, \end{aligned} \qquad (\text{ب ۵ الف})$$

یعنی

$$b_i = T_{ij}a_j. \qquad (\text{ب ۵ ب})$$

برای مقاصد محاسباتی، معادلات فوق [معادلات (ب ۵ الف و ب)] را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{ب ۵ پ}$$

ماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس تانسور **T** نسبت به مجموعه بردارهای یکه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ خوانده می‌شود.

توجه کنید که در نخستین ستون ماتریس، مولفه‌های بردار $\mathbf{Te}_1$، در دومین ستون، مولفه‌های بردار $\mathbf{Te}_2$ و در سومین، مولفه‌های $\mathbf{Te}_3$ واقع شده‌اند. یعنی

$$\mathbf{Te}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 = T_{j1}\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{Te}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 = T_{j2}\mathbf{e}_j, \tag{ب ۶ الف}$$

$$\mathbf{Te}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 = T_{j3}\mathbf{e}_j,$$

یا

$$\mathbf{Te}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j. \tag{ب ۶ ب}$$

واضح است که مولفه‌های **T** وابسته به دستگاه مختصات - از طریق یکه بردارهای پایه $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ می‌باشند، درست نظیر مولفه‌های یک بردار که با موقعیتهای [19] متفاوت تغییر می‌کنند. بردار، وابسته به هیچ دستگاه مختصاتی نیست، ولو این که مولفه‌های آن وابسته باشند. به طور مشابه، یک تانسور، وابسته به هیچ دستگاه مختصاتی نیست، هرچند که مولفه‌های آن وابسته‌باشند.* بنابراین یک تانسور، بی‌نهایت ماتریس دارد که هرکدام متناظر با یک مجموعه بردارهای یکه پایه هستند. ما نمادگذاری زیر را برای ماتریسهای مختلف یک تانسور، مورد استفاده قرار می‌دهیم. اگر $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ و $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ دو بردار پایه متفاوت باشند، آن‌گاه ماتریس، نسبت به $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$[\mathbf{T}] \quad \text{یا} \quad [T_{ij}],$$

19- Orientations

* هر عنصر نظیر بردار یا تانسور که مستقل از دستگاه مختصات تعریف شود یک پایا invariant نسبت به مختصات خوانده می‌شود. به هر حال توجه کنید که یک بردار یا یک تانسور، ممکن است به ناظر Observer (چارچوب frame نیز گفته شود) وابسته باشد. به عنوان مثال بردار سرعت، نسبت به مختصات پایا اما نسبت به ناظر پایا نیست.

و نسبت به $\{e_1', e_2', e_3'\}$ به صورت

$$[\mathbf{T}]' \quad \text{یا} \quad [T'_{ij}].$$

مثال ۲-۱

اگر $\mathbf{T}$ هر برداری را به تصویر آینه‌ای آن نسبت به یک صفحه ثابت تبدیل کند، ماتریس $\mathbf{T}$ را بیابید. همچنین ثابت کنید که $\mathbf{T}$ یک تانسور است (یعنی یک تبدیل خطی است).

حل : فرض کنید که $\mathbf{e}_1$ عمود بر صفحه آینه بوده و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ روی صفحه قرار داشته باشند. پس

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{T}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{T}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.$$

بنابر این[معادله ب ٦ الف) را ببینید]:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}$$

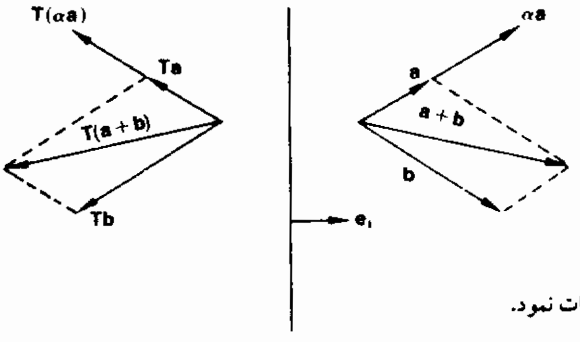
توجه کنید که چنان‌چه مجموعه بردارهای پایه جدیدی، مثلا $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3$ ، $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1$ به کار گرفته شود، آن گاه

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1',$$
$$\mathbf{T}\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2',$$
$$\mathbf{T}\mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_3',$$

و

$$[\mathbf{T}]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'}$$

در حقیقت $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است. به وضوح از شکل ۱-۲ قابل مشاهده است که $\mathbf{T}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b}$ و $\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a}$. البته این را به صورت تحلیلی، بدون هیچ گونه مشکلی می‌توان اثبات نمود.



شکل ۲-۱

مثال ۲-۲

نشان دهید که اگر $\mathbf{T}$ هر برداری را به بردار یکه در یک جهت ثابت تبدیل کند، آن گاه $\mathbf{T}$ یک تانسور نیست.

حل : فرض کنید $\mathbf{n}$ برادر یکه‌ای است که تمامی بردارها تحت $\mathbf{T}$ به آن تبدیل می‌شوند. پس ما برای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داریم:

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{Tb} = \mathbf{n}, \quad \text{و} \quad \mathbf{T}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{n}.$$

واضح است که $\mathbf{T}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \neq \mathbf{Ta}+\mathbf{Tb}.$

۲ ب ۳ - جمع تانسورها

فرض کنید که $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ دو تانسور باشند. جمع $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ را با $(\mathbf{T}+\mathbf{S})$ نشان داده، و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})\mathbf{a} = \mathbf{Ta}+\mathbf{Sa} \quad \text{برای هر } \mathbf{a} \tag{ب ۷}$$

واضح است که $(\mathbf{T}+\mathbf{S})$، همان گونه که تعریف شد، در واقع یک تانسور است.

مولفه‌های $(\mathbf{T}+\mathbf{S})$ عبارتند از * :

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}+\mathbf{S})\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Se}_j,$$

یا

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \tag{ب ۸ الف}$$

و به صورت نمادگذاری ماتریسی

$$[\mathbf{T}+\mathbf{S}] = [\mathbf{T}] + [\mathbf{S}]. \tag{ب ۸ ب}$$

۲ ب ۴ - حاصل ضرب دیادیک a و b

حاصلضرب دیادیک[۲۲] $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را با $\mathbf{ab}$ نمایش داده و به عنوان تبدیلی تعریف می‌کنند که هر $\mathbf{C}$ را بر

---

* در سراسر متن حاضر $\mathbf{a}_i$ نمایشگر سه بردار $\mathbf{a}_3$، $\mathbf{a}_2$، $\mathbf{a}_1$ می‌باشد، حال آن که $(\mathbf{a})_i$ بیانگر سه مولفه a_3، a_2، a_1 از بردار $\mathbf{a}$ است. نمادگذاری تانسورها نیز بر این روال است.

22 - dyadic product

طبق قاعده زیر تبدیل می‌کند:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}). \qquad \text{(ب۹)*}$$

حال بر اساس این قاعده، برای هر c، d، α، β داریم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab})(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d}) &= \mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d})]\\ &= \mathbf{a}[\alpha(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})]\\ &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\\ &= \alpha(\mathbf{ab})\mathbf{c}+\beta(\mathbf{ab})\mathbf{d}.\end{aligned}$$

بنابراین (ab) یک تانسور است. مولفه‌های آن نسبت به بردارهای یکه پایه‌ای نظیر $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ عبارتند از

$$(\mathbf{ab})_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{ab})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j)] = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}b_j) \qquad \text{(ب ۱۰ الف)}$$

$$= (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a})b_j = a_ib_j, \quad \text{i.e., } (\mathbf{ab})_{ij} = a_ib_j.$$

پس

$$[\mathbf{ab}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix} \qquad \text{(ب ۱۰ ب)}$$

یا

$$[\mathbf{ab}] = \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}[b_1 \quad b_2 \quad b_3]. \qquad \text{(ب ۱۰ پ)}$$

به خصوص

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \qquad [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \qquad [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$ ، و غیره

* برخی از مولفان $(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}$ را برای $(\mathbf{ab})\mathbf{c}$ و $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab})$ را برای $(\mathbf{ab}^T)\mathbf{c}$ به کار می‌برند (تعریف برگردان transpose را در بخش ۲ ب ۷ ببینید). همچنین بعضی از مولفان $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ را به جای $\mathbf{ab}$ می‌نویسند.

بنابراین، واضح است که تانسور $\mathbf{T}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\mathbf{T} = T_{11}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) + T_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + T_{13}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) + T_{21}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \dots,$$

یعنی

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

۲ ب ۵ - حاصل‌ضرب دو تانسور

اگر $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ دو تانسور باشند، آن‌گاه $\mathbf{TS}$ و $\mathbf{ST}$ به گونه‌ای تعریف می‌شوند که تبدیلات زیرین برقرار باشند (که به سادگی تانسور بودن آنها مشهود است).

$$(\mathbf{TS})\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{Sa}) \qquad \text{(ب ۱۳)}$$

$$(\mathbf{ST})\mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{Ta}). \qquad \text{(ب ۱۴)}$$

بنابراین مولفه‌های $(\mathbf{TS})$ عبارتند از

$$(\mathbf{TS})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{TS})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}S_{mj}\mathbf{e}_m = S_{mj}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_m),$$

یعنی

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im}S_{mj}. \qquad \text{(ب ۱۵)}$$

به طور مشابه

$$(\mathbf{ST})_{ij} = S_{im}T_{mj}. \qquad \text{(ب ۱۶)}$$

معادلات (ب ۱۵) و (ب ۱۶) معادل معادلات ماتریسی زیر می‌باشند

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}] \qquad \text{(ب ۱۷)}$$

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}] \qquad \text{(ب ۱۸)}$$

در اینجا بایستی تاکید کرد که به طور کلی $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$ است. یعنی در حالت کلی حاصل ضرب تانسور جابه جایی پذیر[۲۴] نیست.

اگر $\mathbf{T}$، $\mathbf{S}$ و $\mathbf{V}$ سه تانسور باشند، آن‌گاه

$$\big(\mathbf{T}(\mathbf{SV})\big)\,\mathbf{a} = \mathbf{T}\big((\mathbf{SV})\mathbf{a}\big) = \mathbf{T}\big(\mathbf{S}(\mathbf{Va})\big)$$

24- Commutative

و
$$(\mathbf{TS})(\mathbf{Va}) = \mathbf{T}\big(\mathbf{S}(\mathbf{Va})\big),$$

یعنی

$$\mathbf{T}(\mathbf{SV}) = (\mathbf{TS})\mathbf{V}. \qquad \text{(ب ۱۹)}$$

بنابراین، حاصل ضرب تانسور از قوانین شرکت پذیری[۲۵] تبعیت می‌کند.

مثال ۲-۳

(الف) یک جسم صلب در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول محوری به اندازه 90° می‌چرخد. ماتریسی را بیابید که نمایشگر این چرخش باشد (یک تبدیل خطی واضح).

حل: فرض شود که $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ مجموعه‌ای از بردارهای یکه پایه راستگرد باشد که $\mathbf{e}_3$ محور دوران است. فرض کنید $\mathbf{R}$ یک تبدیل باشد. پس

$$\mathbf{Re}_1 = \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{Re}_2 = -\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{Re}_3 = \mathbf{e}_3,$$

یعنی [معادله (ب ٦ الف) را ببینید]:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}.$$

شکل ۲-۲

(ب) فرض کنید که جسم فوق متعاقباً 90° حول محور $\mathbf{e}_1$* (مطابق با قاعده پیچ راستگرد) بچرخد، ماتریسی را که نمایش دهنده نتیجه دوران باشد، پیدا کنید. اگر موقعیت نقطه‌ای مانند p، (۱،۱،۰) باشد، موقعیت آن پس از دو چرخش چیست؟

حل: فرض کنید $\mathbf{S}$ دومین تبدیل باشد، آن گاه

$$\mathbf{Se}_1 = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{Se}_2 = \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{Se}_3 = -\mathbf{e}_2,$$

25 - associative laws

* نمادگذاری $\mathbf{e}_1$ همواره به بردارهای پایه اولیه اشاره دارد.

یعنی

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

چون $\mathbf{S}(\mathbf{Ra}) = (\mathbf{SR})\mathbf{a}$ است، لذا نتیجه دوران، با یک تبدیل $\mathbf{SR}$ ارائه می‌شود که مولفه‌های آن با ماتریس زیر داده می‌شود:

$$[\mathbf{SR}] = [\mathbf{S}][\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

اگر موقیتهای اولیه و نهایی نقطه p به ترتیب با $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}^*$ نمایش داده شود، آن‌گاه

$$[\mathbf{r}^*] = [\mathbf{SR}][\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

یعنی

$$\mathbf{r}^* = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$

(پ) حال ترتیب دورانها را معکوس کرده، موقعیت نهایی نقطه p را بیابید.

حل: موقعیت جدید و نهایی p را با $\mathbf{r}^{**}$ نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{r}^{**} = \mathbf{R}(\mathbf{Sr}) = (\mathbf{RS})\mathbf{r}.$$

مولفه‌های $\mathbf{r}^{**}$ عبارت‌اند از

$$[\mathbf{r}^{**}] = [\mathbf{R}]\,[\mathbf{S}]\,[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\mathbf{r}^{**} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$

۲ ب ٦ - تانسور واحد

آن تبدیل خطی که هر بردار را به خودش تبدیل کند یک **تانسور واحد**[27] خوانده می‌شود. این تانسور خاص را با $\mathbf{I}$ نمایش داده، داریم:

(ب ۲۰) برای هر $\mathbf{a}$ $\qquad \mathbf{Ia} = \mathbf{a}$

27 - identity tensor

و به خصوص

$$\mathbf{I}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{I}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{I}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.$$

بنابراین مولفه‌های (دکارتی) تانسور واحد عبارتند از:

(ب ۲۱ الف)
$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

یعنی

(ب ۲۱ ب)
$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

واضح است که ماتریس واحد، ماتریسی از $\mathbf{I}$ برای تمامی مختصات مستقیم الخط قائم می‌باشد.

۲ ب ۷ - برگردان یک تانسور[28]

برگردان تانسور $\mathbf{T}$ که با $\mathbf{T}^T$ نمایش داده می‌شود، به گونه‌ای تعریف می‌شود که اتحاد زیر را برای تمامی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ارضا کند:

(ب ۲۲)
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{T}^T\mathbf{a}).$$

به سادگی دیده می‌شود که $\mathbf{T}^T$ یک تانسور است.

از تعریف فوق داریم:
$$\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{T}^T\mathbf{e}_i).$$

بنابراین

(ب ۲۳)
$$T_{ij} = T^T_{ji}.$$

یعنی ماتریس $\mathbf{T}^T$ برگردان ماتریس $\mathbf{T}$ است. به سادگی می‌توان ثابت نمود که

(ب ۲۴)
$$(\mathbf{S}\mathbf{T})^T = \mathbf{T}^T\mathbf{S}^T.$$

۲ ب ۸ - تانسور متعامد[29]

تانسور متعامد، یک تبدیل خطی است که در آن، طولها و زوایای بین بردارهای تبدیل شده، حفظ

28 - Transpose of a Tensor

29 - Orthogonal tensor

می‌شود. اگر $\mathbf{Q}$ یک تانسور متعامد باشد، پس مطابق با تعریف، برای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، $|\mathbf{Qa}| = |\mathbf{a}|$ و $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{Qa}, \mathbf{Qb})$ است. بنابراین برای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$

(ب ۲۵)
$$(\mathbf{Qa}) \cdot (\mathbf{Qb}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

اما
$$(\mathbf{Qa}) \cdot (\mathbf{Qb}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{Qa})$$

[معادله (ب ۲۲) را ببینید]: بنابراین

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qa},$$

یعنی
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{Ia} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qa},$$

یا
$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{a} = 0,$$

چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ اختیاری هستند، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

می‌توان نشان داد که برگردان یک تانسور متعامد، یک تانسور متعامد است (مسئله ب ۱۰ را نگاه کنید).

پس داریم
$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

بنابراین

(ب ۲۶الف)*
$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

که شکل ماتریسی آن به این صورت است:

(ب ۲۶ ب)
$$[\mathbf{Q}]\,[\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{Q}]^T\,[\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}]$$

و به صورت شاخصی چنین خواهد بود:

(ب ۲۶ پ)
$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}.$$

مثال ۲-۵

واضح است که تانسور داده شده در مثال ۲-۳ (که مبین چرخش یک جسم صلب بود) یک تانسور متعامد است. برای $\mathbf{R}$ در آن مثال، ثابت کنید $[\mathbf{R}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{I}]$. همچنین دترمینان $\mathbf{R}$ را بیابید.

---

* به عبارت دیگر، $\mathbf{Q}^T$ معکوس $\mathbf{Q}$ است که اغلب به صورت $\mathbf{Q}^{-1}$ نمایش داده می‌شود.

حل:

$$[\mathbf{R}]\,[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det[\mathbf{R}] = |\mathbf{R}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که دترمینان ماتریس هر تانسور متعامد Q برابر ۱+ یا ۱- است. در حقیقت

$$[\mathbf{Q}]\,[\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{I}],$$

$$|[\mathbf{Q}]\,[\mathbf{Q}]^T| = |\mathbf{I}| = 1.$$

اما دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس برابر حاصل‌ضرب دترمینانهای مجزا است، $det[\mathbf{Q}] = det[\mathbf{Q}]^T$، بنابراین داریم:

$$|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{Q}^T| = |\mathbf{Q}|^2 = 1.$$

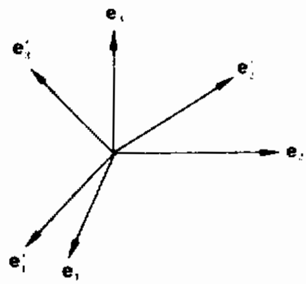
پس

$$|\mathbf{Q}| = \pm 1.$$

مقدار ۱+ متناظر با چرخش و ۱- متناظر با انعکاس است.

۲ ب ۹ - قوانین تبدیل برای مولفه‌های دکارتی بردارها و تانسورها

فرض کنید که $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ و $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ بردارهای یکهٔ مربوط به دو دستگاه مختصات مستقیم الخط قائم می‌باشند (شکل ۲-۳ را ببینید)، واضح است که $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ می‌تواند با یک دوران جسم صلب (اگر هر دو پایه هم‌گرد باشند) یا یک چرخش همراه با یک انعکاس (اگر هم‌گرد نباشند)، بر $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ منطبق شود.



شکل ۲-۳

یعنی $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ و $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ توسط یک تانسور متعامد Q از طریق معادلات زیر با یکدیگر مرتبط می‌شوند

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i = Q_{mi}\mathbf{e}_m, \qquad \text{(ب ۲۷ الف)}$$

یعنی:

$$\mathbf{e}_1' = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{21}\mathbf{e}_2 + Q_{31}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_2' = Q_{12}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{32}\mathbf{e}_3, \qquad \text{(ب ۲۷ ب)}$$
$$\mathbf{e}_3' = Q_{13}\mathbf{e}_1 + Q_{23}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3,$$

که :

$$Q_{mi}Q_{mj} = Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij} \quad \text{یعنی} \quad (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}).$$

توجه شود که

$$Q_{mi} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i' = \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i').$$

حال برداری نظیر $\mathbf{a}$ را در نظر بگیرید. مولفه‌های (دکارتی) $\mathbf{a}$ نسبت به $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ و $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ به ترتیب $a_i = \mathbf{e}_i.\mathbf{a}$ و $a_i' = \mathbf{e}_i'.\mathbf{a}$ می‌باشد. چون $a_i' = \mathbf{e}_i'.\mathbf{a} = Q_{mi}\mathbf{e}_m.\mathbf{a}$ داریم

$$\boxed{a_i' = Q_{mi}a_m} \qquad \text{(ب ۲۸ الف)}$$

شکل ماتریسی معادلات فوق چنین است

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i'} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \qquad \text{(ب ۲۸ ب)}$$

یا

$$[\mathbf{a}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{a}]. \qquad \text{(ب ۲۸ پ)}$$

معادله (ب ۲۸) قانون تبدیل است که مولفه‌های مختلف یک بردار را در دستگاههای مختصات دکارتی متفاوت به یکدیگر مرتبط می‌سازد. توجه به این نکته مهم است که در معادله (ب ۲۸پ)، $[\mathbf{a}]' \equiv [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}_i'}$ و $[\mathbf{a}] \equiv [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}_i}$ یعنی معادله (ب ۲۸ پ)، معادله ماتریسی برای $\mathbf{a}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{a}$ نیست. تفاوت این‌جا است که $[\mathbf{a}]$ و $[\mathbf{a}]'$ ماتریسهای یک بردار واحد می‌باشند، حال آن که $\mathbf{a}'$ بردار تبدیل شدهٔ $\mathbf{a}$ (توسط $\mathbf{Q}^T$) است.

اینک تانسوری مانند $\mathbf{T}$ را در نظر بگیرید. مولفه‌های $\mathbf{T}$ نسبت به $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ و $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ به ترتیب عبارتند از $T_{ij} = \mathbf{e}_i.\mathbf{T}\mathbf{e}_j$ و $T'_{ij} = \mathbf{e}'_i.\mathbf{T}\mathbf{e}'_j$ چون

$T'_{ij} = \mathbf{e}'_i.\mathbf{T}\mathbf{e}'_j = Q_{mi}\mathbf{e}_m.\mathbf{T}Q_{nj}\mathbf{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}(\mathbf{e}_m.\mathbf{T}\mathbf{e}_n)$، داریم

$$\boxed{T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}}. \qquad \text{(ب ۲۹ الف)}$$

معادله (ب ۲۹ الف) در شکل ماتریسی خود چنین خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}_{e'_i} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}_{e_i} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{e_i} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}_{e_i}$$

یا به طور خلاصه

(ب ۲۹ ب)
$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{T}]\,[\mathbf{Q}].$$

معادل با فوق داریم:

(ب ۳۰ الف)
$$\boxed{T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}}\,.$$

یا با نماد ماتریسی

(ب ۳۰ ب)
$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}]\,[\mathbf{T}]'\,[\mathbf{Q}]^T.$$

معادله (ب ۲۹ الف) قانون تبدیل است که مولفه‌های مختلف یک تانسور را در دستگاههای مختصات دکارتی متفاوت به یکدیگر مرتبط می‌سازد. مجدداً توجه به این نکته مهم است که در معادلات (ب ۲۹ ب) و (ب ۳۰ ب)، $\mathbf{T}$ و $[\mathbf{T}]'$ ماتریسهای متفاوت از یک و همان تانسور $\mathbf{T}$ می‌باشند معادله (ب ۲۹ ب) را با معادله $\mathbf{T}'=\mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q}$ اشتباه نگیرید.

مثال ۲-۶

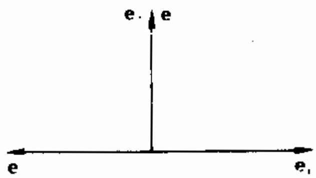
ماتریس زیر داده شده است:

$$[\mathbf{T}]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چنانچه $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ از دوران $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ حول $\mathbf{e}_3$ به اندازه °۹۰ حاصل شده باشد، $[\mathbf{T}]_{e_1'e_2'e_3'}$ را بیابید.

حل: چون

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3.$$



شکل ۲-۴

تنها عضوهای غیر صفر **Q** عبارتند از

$$Q_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2' = -1,$$
$$Q_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1' = 1,$$
$$Q_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3' = 1,$$

یعنی

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین:

$$[\mathbf{T}]' = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i'}.$$

یعنی $T'_{13}=0$ ، $T'_{12}=-1$ ، $T'_{11}=2$ و غیره.

توجه شود که در صورت نیاز به یک مولفه T_{ij}، ما می‌توانستیم فرمول زیر را به‌کار ببریم:

$$T_{ij}' = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j',$$

به عنوان مثال، چنان چه تنها در پی T'_{11} بودیم، آن‌گاه:

$$T_{11}' = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1' = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

یا

$$T_{11}' = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 = T_{22} = 2.$$

مثال ۲-۷

نشان دهید که اگر S_{ij} مولفه‌های دکارتی تانسور **S** باشد، آنگاه $S_{ii}=S_{11}+S_{22}+S_{33}$ یک پایای عددی [۳۱] نسبت به تمامی تبدیلات متعامد است. یعنی $S_{11}+S_{22}+S_{33} = S'_{11}+S'_{22}+S'_{33}$

حل : مولفه‌های پریم‌دار توسط معادله (ب ۲۹ الف) به مولفه‌های بدون پریم مرتبط می‌شوند:

$$S_{ij}' = Q_{mi}Q_{nj}S_{mn}.$$

این بدان معنا است که:

$$S_{11}' = Q_{m1}Q_{n1}S_{mn},$$
$$S_{22}' = Q_{m2}Q_{n2}S_{mn},$$

31 - Scalar invariant

و $$S'_{33} = Q_{m3}Q_{n3}S_{mn}.$$

حاصل جمع فوق می‌دهد:
$$S'_{ii} = S'_{11} + S'_{22} + S'_{33} = Q_{mi}Q_{ni}S_{mn}.$$

اما از معادله (پ ۲۶) داریم
$$S'_{ii} = \delta_{mn}S_{mn} = S_{mm}.$$

نتیجه این مثال، مبین این است که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نمی‌توانند ماتریسهای یک تانسور باشند.

معادلات (ب ۲۸) و (ب ۲۹) بیان می‌دارند که هرگاه مولفه‌های یک بردار (یا یک تانسور) نسبت به دستگاه $\{e_1, e_2, e_3\}$ معلوم باشند، آن‌گاه مولفه‌های آن نسبت به هر $\{e_1', e_2', e_3'\}$ به طور یگانه و منحصر به فرد از آنها (مولفه‌های فوق) قابل استخراج و محاسبه خواهند بود. به عبارت دیگر، مولفه‌های a_i (یا T_{ij}) نسبت به هر دستگاه $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک بردار (یا یک تانسور) را به طور کامل مشخص می‌کند. بنابراین، استعمال جملاتی نظیر "تانسور T_{ij} را در نظر بگیرید" بجا و هم معنای "تانسور $\mathbf{T}$، که مولفه‌های آن نسبت به دستگاه $\{e_1, e_2, e_3\}$، T_{ij} است". خواهد بود. در حقیقت، صورت دیگر تعریف تانسور، استفاده از قوانین تبدیلی است که مولفه‌های یک تانسور را نسبت به پایه‌های متفاوت، به یکدیگر مرتبط می‌سازد. حال، خود را تنها به دستگاههای مختصات مستقیم الخط دکارتی (قائم) محدود ساخته، بردارهای یکه را در امتداد جهات مثبت مختصات به عنوان بردارهای پایه به‌کار می‌بریم. سپس مولفه‌های دکارتی تانسورها با مرتبه‌های مختلف را برحسب قوانین تبدیل آنهاو به صورت زیر تعریف می‌کنیم، کمیتهای پریم‌دار، مربوط به پایه $\{e_1', e_2', e_3'\}$ وکمیتهای بدون پریم مربوط به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ و e_i' و e_i توسط رابطه $e'_i = \mathbf{Q}e_i$ مرتبط می‌شوند، که $\mathbf{Q}$ یک تبدیل متعامد است:

تانسور مرتبه صفر (یا عددی) $\quad \alpha' = \alpha$

(ب ۳۱) تانسور مرتبه یک (یا بردار) $\quad a_i' = Q_{mi}a_m$

تانسور مرتبه دو (یا تانسور) $\quad T_{ij}' = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$

تانسور مرتبه سه $\quad T_{ijk}' = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr}$

مثال ۲-۸

نشان دهید که (الف) اگر A_{ijkl} و A'_{ijkl} مولفه‌های یک تانسور مرتبه چهار نسبت به پایه‌های $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ باشند، و

اگر $\mathbf{B}_{ij}$ و $\mathbf{B}'_{ij}$ مولفه‌های یک تانسور مرتبه دو نسبت به همان پایه‌های $\{\mathbf{e}_i\}$ و $\{\mathbf{e}'_i\}$ باشند، آن‌گاه $D_{ij}\equiv A_{ijkl}B_{kl}$ و $D'_{ij}\equiv A'_{ijkl}B'_{kl}$ مولفه‌های یک تانسور مرتبه دو خواهند بود، (ب) اگر نسبت به هر مبنای قائم دکارتی $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}, \tag{I}$$

باشد (که T_{ij} و E_{ij} مولفه‌های تانسورهای اختیاری مرتبه دوم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{E}$ هستند) نشان دهید که A_{ijkl} مولفه‌های یک تانسور مرتبه چهار می‌باشد (این موضوع به عنوان قاعده خارج قسمت [32] مشهور است)

حل: (الف) داریم

$$A'_{ijkl} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}Q_{sl}A_{mnrs}$$

و

$$B'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}B_{mn}.$$

بنابراین

$$A'_{ijkl}B'_{kl} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}Q_{sl}A_{mnrs}Q_{pk}Q_{ql}B_{pq}.$$

اما

$$Q_{rk}Q_{pk} = \delta_{rp} \quad \text{and} \quad Q_{sl}Q_{ql} = \delta_{sq}.$$

پس

$$A'_{ijkl}B'_{kl} = \delta_{rp}\delta_{sq}Q_{mi}Q_{nj}A_{mnrs}B_{pq} = Q_{mi}Q_{nj}A_{mnpq}B_{pq}.$$

یعنی

$$D'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}D_{mn}.$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{D}_{ij}$ و $\mathbf{D}'_{ij}$ در حقیقت توسط قانون تبدیل برای یک تانسور مرتبه دو، به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

(ب) چون $\mathbf{T}$ و $\mathbf{E}$ هر دو تانسورهای مرتبه دو می‌باشند، می‌توان مولفه‌های بدون پریم را جایگزین مولفه‌های پریم‌دار در معادله (I) نمود، که می‌دهد:

$$Q_{im}Q_{jn}T'_{mn} = C_{ijkl}Q_{ko}Q_{lp}E'_{op}. \tag{II}$$

اما چون معادله (I) برای هر پایه‌ای معتبر است، مولفه‌های پریم دار $\mathbf{T}$ و $\mathbf{E}$ نیز به صورت زیر مرتبط می‌شوند:

$$T'_{mn} = C'_{mnop}E'_{op}. \tag{III}$$

معادله (III) را در معادله (II) قرار داده، داریم:

$$Q_{im}Q_{jn}C'_{mnop}E'_{op} = C_{ijkl}Q_{ko}Q_{lp}E'_{op}.$$

چنانچه این معادله را در $Q_{ir}Q_{js}$ ضرب کرده و معادله (ب ۲٦ پ) را به کار ببریم، و نیز با انتقال Qها به طرف راست معادله داریم:

$$\delta_{rm}\delta_{sn}C'_{mnop}E'_{op} = C_{ijkl}Q_{ir}Q_{js}Q_{ko}Q_{lp}E'_{op}.$$

---

32 - quotient rule

با آوردن تمامی مولفه‌های معادله به طرف چپ، خواهیم داشت:

$$(C'_{rsop} - C_{ijkl}Q_{ir}Q_{js}Q_{ko}Q_{lp})E'_{op} = 0.$$

مولفه‌های تانسور $\mathbf{E}$ اختیاری است، لذا پرانتز باید برابر صفر باشد. پس:

$$C'_{rsop} = Q_{ir}Q_{js}Q_{ko}Q_{lp}C_{ijkl}$$

و C_{ijkl} نظیر مولفه‌های یک تانسور مرتبه چهار، تبدیل می‌شود.

مثال ۲-۹

یک تانسور مرتبه سه را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود: $\mathbf{M}$ یک تانسور مرتبه سه است، اگر برای هر بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{Ma}$ یک تانسور مرتبه دو بوده و $\mathbf{M}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{Ma}+\beta\mathbf{Mb}$ باشد، با تعریف مولفه‌های $\mathbf{M}$ به صورت زیر

$$M_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{Me}_k)\mathbf{e}_j,$$

نشان دهید که مولفه‌های $\mathbf{M}$ بر طبق قانون معادله (ب ۳۱) تبدیل می‌شود.

حل:

$$\begin{aligned} M'_{ijk} &= \mathbf{e}'_i \cdot (\mathbf{Me}'_k)\mathbf{e}'_j = Q_{mi}\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{M}Q_{nk}\mathbf{e}_n)Q_{pj}\mathbf{e}_p \\ &= Q_{mi}Q_{pj}Q_{nk}\{\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{Me}_n)\mathbf{e}_p\} = Q_{mi}Q_{pj}Q_{nk}M_{mpn}. \end{aligned}$$

مثال ۲-۱۰

با استفاده از تعریف داده شده در مثال ۲-۹، مولفه‌های یک تریاد[33] $(\mathbf{a\ b\ c})$ [که توسط $(\mathbf{a\,b\,c})\,\mathbf{d} = (\mathbf{a\,b})(\mathbf{c.d})$ تعریف می‌شود] را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a\,b\,c})_{ijk} &= \mathbf{e}_i \cdot \{(\mathbf{a\,b\,c})\mathbf{e}_k\}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \{(\mathbf{a\,b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_k)\}\mathbf{e}_j \\ &= c_k\{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a\,b})\mathbf{e}_j\} = c_k a_i b_j = a_i b_j c_k. \end{aligned}$$

در این جا خاطر نشان می‌سازیم که هر تانسور مرتبه سه را می‌توان چنین نمایش داد:

$$\mathbf{M} = M_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k.$$

۲ ب ۱۰ - تانسورهای متقارن و پادمتقارن[34]

تانسور $\mathbf{T}$ را متقارن گویند اگر $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$. بنابراین مولفه‌های یک تانسور متقارن دارای خاصیت زیر

33 triad

34 Symmetric and Antisymmetric Tensors

است:

$$T_{ij} = (\mathbf{T}^T)_{ij} = T_{ji}, \tag{ب ۳۲}$$

یعنی

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad \text{and} \quad T_{23} = T_{32}.$$

تانسور $\mathbf{T}$ را پاد متقارن گویند اگر $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$. بنابراین مولفه‌های یک تانسور پادمتقارن دارای خاصیت زیر است:

$$T_{ij} = -(\mathbf{T}^T)_{ij} = -T_{ji}, \tag{ب ۳۳}$$

یعنی:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0,$$

$$T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad \text{and} \quad T_{23} = -T_{32}.$$

هر تانسور $\mathbf{T}$ همواره می‌تواند به مجموع یک تانسور متقارن و یک تانسور پاد متقارن تجزیه شود. در حقیقت

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A, \tag{ب ۳۴}$$

که:

متقارن است

$$\mathbf{T}^S = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2}$$

و

پاد متقارن.

$$\mathbf{T}^A = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2}$$

اثبات این که تجزیه فوق منحصر به فرد[35] است، مشکل نخواهد بود (مسئله ب ۲۵ را ببینید).

۲ ب ۱۱ - بردار دوگان یک تانسور پاد متقارن

برای هر تانسور پاد متقارن $\mathbf{T}$، همواره می‌توان برداری را که به *بردار دوگان*[*36] مشهور است و توسط $\mathbf{t}^A$ نشان داده می‌شود، تعریف نمود. به گونه‌ای که هر بردار $\mathbf{a}$ تحت $\mathbf{T}$ به بردار $\mathbf{t}^A \times \mathbf{a}$ تبدیل شود. یعنی:

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a}. \tag{ب ۳۵}$$

35 - unique

36 - dual vector

* به عنوان بردار محوری $\mathbf{T}$ نیز خوانده می‌شود.

در حقیقت مولفه‌های $\mathbf{t}^A$ را به طریق زیر می‌توان یافت:

از $\mathbf{T}\mathbf{e}_j = \mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_j$ داریم

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{t}^A \times \mathbf{e}_j) = \mathbf{t}^A \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i).$$

چون $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ است، برای اینکه $\mathbf{t}^A$ وجود داشته باشد، باید T_{ij} برابر $-\mathrm{T}_{ij}$ باشد. هنگامی که $\mathrm{T}_{ij} = -\mathrm{T}_{ij}$ (یعنی T پادمتقارن است)، مولفه‌های غیر صفر T_{ij} به مولفه‌های $\mathbf{t}^A$ - در صورت راستگرد بودن $(\mathbf{e}_1، \mathbf{e}_2، \mathbf{e}_3)$ - از طریق زیر ارتباط پیدا می‌کنند:

$$T_{32} = -T_{23} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^A \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_1 = t_1{}^A,$$

$$T_{13} = -T_{31} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = t^A \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_2 = t_2{}^A,$$

و

$$T_{21} = -T_{12} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}^A \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{t}^A \cdot \mathbf{e}_3 = t_3{}^A.$$

بنابراین

$$\mathbf{t}^A = T_{32}\mathbf{e}_1 + T_{13}\mathbf{e}_2 + T_{21}\mathbf{e}_3 \qquad \text{(ب ۳٦ الف)}$$

یا

$$\mathbf{t}^A = -(T_{23}\mathbf{e}_1 + T_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}\mathbf{e}_3), \qquad \text{(ب ۳٦ ب)}$$

یعنی

$$2\mathbf{t}^A = -\epsilon_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i. \qquad \text{(ب ۳٦ پ)}$$

مثال ۲-۱۱

ماتریس زیر داده شده است

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

تانسور فوق را به بخشهای متقارن و پادمتقارن تجزیه کنید. همچنین بردار دوگان بخش پاد متقارن را بیابید. برای $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$، ثابت کنید $\mathrm{T}^A\mathbf{a} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{a}$

حل: $[\mathrm{T}] = [\mathrm{T}^S] + [\mathrm{T}^A]$، که

$$[\mathrm{T}^S] = \tfrac{1}{2}([\mathrm{T}] + [\mathrm{T}]^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathrm{T}^A] = \tfrac{1}{2}([\mathrm{T}] - [\mathrm{T}]^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

یعنی:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بردار $\mathbf{t}^A$ عبارت است از:

$$\mathbf{t}^A = -(T^A_{23}\mathbf{e}_1 + T^A_{31}\mathbf{e}_2 + T^A_{12}\mathbf{e}_3) = -(0\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

حال، فرض کنید:

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

یعنی

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

به عبارت دیگر

$$\mathbf{t}^A \times \mathbf{a} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}.$$

مثال ۲-۱۲

تانسور چرخش $\mathbf{Q}$ داده شده است، و $\mathbf{n}$ برداریکه‌ای در جهت محور دوران می‌باشد، ثابت کنید که بردار دوگان $\mathbf{q}$ از $\mathbf{Q}^A$ موازی $\mathbf{n}$ می‌باشد.

حل: چون $\mathbf{n}$ موازی محور دوران می‌باشد، لذا

$$\mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n}. \qquad \text{(I)}$$

بنابراین $(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{n} = \mathbf{Q}^T\mathbf{n}$. چون $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ است، داریم:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{n} = \mathbf{n}. \qquad \text{(II)}$$

از معادلات (I) و (II) به دست می‌آوریم:

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{n} = 0.$$

اما:

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{n} = 2\mathbf{q} \times \mathbf{n},$$

که $\mathbf{q}$ بردار $\mathbf{Q}^A$ است بنابراین:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{n} = 0,$$

یعنی:

$$\mathbf{q} \parallel \mathbf{n}.$$

می‌توان نشان داد (مسئله ب ۳۳ را ببینید) که اگر θ زاویه راستگرد چرخش باشد، آن گاه

$$\mathbf{q} = (\sin\theta)\mathbf{n}.$$

۲ ب ۱۲ - مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تانسور $\mathbf{T}$

تانسور $\mathbf{T}$ را در نظر بگیرید. چنان‌چه $\mathbf{a}$ برداری باشد که تحت $\mathbf{T}$ به برداری موازی خودش

تبدیل شود (یعنی $\mathbf{Ta} = \lambda\mathbf{a}$)، آن‌گاه a یک **بردار ویژه**[۳۸] و λ **مقدار ویژه**[۳۹] متناظر با آن می‌باشد.

اگر a یک بردار ویژه با مقدار ویژه متناظر λ از تبدیل خطی T باشد، آن‌گاه هر بردار به موازات a نیز یک بردار ویژه با همان مقدار ویژه λ خواهد بود. در حقیقت، برای هر عدد α داریم:

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{Ta} = \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a}).$$

لذا یک بردار ویژه (که به صورت $\mathbf{Ta}=\lambda\mathbf{a}$ تعریف می‌شود) دارای طول اختیاری است. برای وضوح، طول تمامی بردارهای ویژه تحت بررسی، واحد فرض می‌شود.

یک تانسور، ممکن است دارای بردارهای ویژه در جهات مختلف باشد. در حقیقت، چون $\mathbf{Ia}=\mathbf{a}$ است، هر بردار، یک بردار ویژه از تانسور واحد I است که مقادیر ویژه آن، همگی برابر واحد هستند. برای تانسور $\alpha\mathbf{I}$ نیز همین امر صادق است، به جز این که مقادیر ویژه، همه برابر α می‌باشند.

برخی از تانسورها تنها در یک جهت دارای بردارهای ویژه هستند. به عنوان مثال، برای هر تانسور چرخش (که جسم صلب را حول یک محور، به اندازه زاویه‌ای که مضرب صحیح π نباشد، بچرخاند) تنها، بردارهایی که موازی محور دوران هستند، موازی خودشان باقی می‌مانند.

اگر n یک بردار یکه ویژه باشد، آن‌گاه $\mathbf{Tn}=\lambda\mathbf{n}=\lambda\mathbf{In}$. پس: $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = 0$ با $\mathbf{n}.\mathbf{n}=1$ فرض شود $\mathbf{n}=\alpha_i\mathbf{e}_i$ ، بنابراین شکل مولفه‌ای معادله فوق $(\mathrm{T}_{ij}-\lambda\delta_{ij})\alpha_j = 0$ با $\alpha_j\alpha_j = 1$. در شکل بسط یافته داریم،

$$(T_{11}-\lambda)\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 = 0, \qquad \text{(ب ۳۷ الف)}$$

$$T_{21}\alpha_1 + (T_{22}-\lambda)\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 = 0, \qquad \text{(ب ۳۷ ب)}$$

$$T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + (T_{33}-\lambda)\alpha_3 = 0, \qquad \text{(ب ۳۷ پ)}$$

معادلات ب ۳۷ الف، ب، و پ یک دستگاه معادلات همگن خطی را برحسب α_1، α_2، α_3 تشکیل می‌دهند، که تنها زمانی حل عمومی و غیر صفر[۴۰] برای α_i ها دارد* که دترمینان ضرایب آنها صفر شود.

---

38 - eigenvector

39 - eigencalue

40 - nontrivial

* برای معادلات (ب ۳۷ الف، ب و پ)، $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ حل جزئی یا صفر trivial است.

یعنی:

$$|\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I}| = 0, \quad \text{(ب ۳۸ الف)}$$

یا

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(ب ۳۸ ب)}$$

برای هر $\mathbf{T}$ داده شده، T_{ij} معلوم بود، معادله فوق یک معادله درجه سه برحسب λ می‌باشد. این معادله، معادله مشخصه[۴۲] $\mathbf{T}$ نامیده می‌شود. ریشه‌های معادله، مقادیر ویژه $\mathbf{T}$ هستند. فرض کنید که ریشه‌ها λ_1، λ_2، λ_3 باشند. در ارتباط با هر λ_i مولفه‌های بردار ویژه متناظر از معادلات (ب ۳۷) محاسبه می‌شوند. [معادلات (ب، ۳۷ الف، پ، ب) هنگامی‌که $\lambda=\lambda_i$ باشد، تماماً مستقل نیستند]. روش فوق را با مثالهایی به خوبی می‌توان توصیف نمود.

مثال ۲-۱۳

نشان دهید که اگر $T_{21}=T_{31}=0$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{e}_1$ یک بردار ویژه $\mathbf{T}$ با مقدار ویژه T_{11} می‌باشد.

حل: از $\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3$ داریم $\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1$.

بنابر این، $\mathbf{e}_1$ یک بردار ویژه است که مقدار ویژه آن T_{11} می‌باشد. به طور مشابه، اگر $T_{12}=T_{32}=0$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{e}_2$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه متناظر T_{22} می‌باشد. و اگر $T_{13}=T_{23}=0$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{e}_3$ یک بردار ویژه متناظر T_{33} خواهد بود.

مثال ۲-۱۴

اگر نسبت به مبنایی نظیر $(\mathbf{e}_1 ، \mathbf{e}_2 ، \mathbf{e}_3)$ ماتریس $\mathbf{T}$ به صورت زیر داده شود

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر آنها را بیابید.

حل: معادله مشخصه عبارت است از:

$$|\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-25) = 0.$$

---

42 - characteristic equation

بنابر این سه مقدار متفاوت $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=5$ و $\lambda_3=-5$ وجود دارد.

برای $\lambda_1=2$ ، معادلات (ب ۳۷ الف، ب، و پ) خواهد شد:

$$0\alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$
$$4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0,$$

و

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

بنابراین $\alpha_2=\alpha_3=0$ و $\alpha_1=\pm 1$ و بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=2$ برابر است با: $\mathbf{n}_1=\pm\mathbf{e}_1$. توجه شود که از مثال قبل، مقدار ویژه ۲ و بردار ویژه مربوط $\pm\mathbf{e}_1$ را می‌توان بدون محاسبه نوشت. متناظر با $\lambda_2=5$ داریم:

$$-3\alpha_1 = 0,$$
$$-2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$
$$4\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0,$$

و

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

بنابراین (توجه شود که معادلات دوم و سوم مشابه‌اند)

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

و بردار ویژه مربوط به $\lambda_2=5$ عبارت است از:

$$\mathbf{n}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

و متناظر با $\lambda_3=-5$ ، محاسبات مشابه خواهد داد:

$$\mathbf{n}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3).$$

مثال ۲-۱۵

بردارهای ویژه و مقادیر ویژه برای تانسور چرخش $\mathbf{R}$ متناظر با 90° دوران حول محور $\mathbf{e}_3$ را بیابید (مثال ۲-۳ را ببینید).

حل: معادله مشخصه عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

یعنی:

$$\lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$

بنابراین، تنها یک مقدار ویژه حقیقی[43] بوده و دوتای دیگر موهومی[44] می‌باشند: $\lambda_2=+\sqrt{-1}$ و $\lambda_3=-\sqrt{-1}$. در نتیجه، تنها یک بردار ویژه حقیقی وجود خواهد داشت. برای ما، فقط بردارهای ویژه حقیقی مهم است، از این‌رو تنها بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=1$ را محاسبه خواهیم کرد؛ از

$$(0-1)\alpha_1-\alpha_2=0,$$

$$\alpha_1-\alpha_2=0,$$

$$(1-1)\alpha_3=0,$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1.$$

داریم: $\alpha_3=\pm 1$ و $\alpha_2=0$ و $\alpha_1=0$ یعنی $\mathbf{n}=\pm\mathbf{e}$، که البته موازی محور دوران می‌باشد.

مثال ۲ـ۱۶

برای تانسور زیر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بیابید:

$$[\mathbf{T}]=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

حل: معادله مشخصه خواهد شد:

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda)=0.$$

بنابراین $\lambda_1=3$ و $\lambda_2=\lambda_3=2$. از نظر مثال ۱۳ - ۲ این نتایج واضح و بدیهی هستند. در حقیقت، آن مثال، گویای این مطلب نیز هست که بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=3$ برابر $\pm\mathbf{e}_3$ و بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_2=\lambda_3=2$، عبارتند $\pm\mathbf{e}_1$ و $\pm\mathbf{e}_2$ می‌باشند. به‌هرحال عملاً بینهایت بردار ویژه متناظر با ریشه مضاعف وجود دارد. از معادلات (ب ۳۷ الف، ب، پ) با $\lambda=2$ داریم:

$$0\alpha_1=0,$$

$$0\alpha_2=0,$$

$$\alpha_3=0,$$

و

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1.$$

معادلات با $\alpha_3=0$ همراه با هرکدام از α_2 و α_1 (که در $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ صدق می‌کند) ارضا می‌شوند. بنابراین، هر برداریکهٔ عمود بر $\mathbf{e}_3$، $\mathbf{n}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2$، یک بردار ویژه می‌باشد.

---

43. real

44. Complex

۲ ب ۱۳ - مقادیر اصلی و جهات اصلی تانسورهای متقارن حقیقی

در فصول آینده به چندین تانسور حقیقی برخواهیم خورد (نظیر تانسور تنش، تانسور کرنش، تانسور نرخ تغییر شکل) که متقارن بوده، برای آنها قضیه زیر، که بدون اثبات بیان می‌شود، مهم است: «مقادیر ویژه هر تانسور متقارن حقیقی تماماً حقیقی هستند». بنابراین، برای یک تانسور متقارن، همواره حداقل سه بردار ویژه (که ما آنها را جهات اصلی[45] خواهیم نامید) وجود دارند. مقادیر ویژهٔ متناظر مقادیر اصلی[46] خوانده می‌شوند.

اینک اثبات خواهیم نمود که همواره سه جهت اصلی (که دوبدو بر هم عمودند) وجود دارند. فرض کنید $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دو بردار ویژه به‌ترتیب متناظر با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 از تانسور $\mathbf{T}$ باشند.

پس:
$$\mathbf{Tn}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_1 \tag{I}$$
و
$$\mathbf{Tn}_2 = \lambda_2\mathbf{n}_2. \tag{II}$$
بنابراین:
$$\lambda_1\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{Tn}_1, \tag{III}$$
$$\lambda_2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{Tn}_2. \tag{IV}$$

تعریف برگردان $\mathbf{T}$ می‌دهد: $\mathbf{n}_1.\mathbf{Tn}_2=\mathbf{n}_2.\mathbf{T}^T\mathbf{n}_1$، بنابراین برای تقارن $\mathbf{T}$، از معادلات (III) و (IV) داریم:
$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0. \tag{V}$$

نتیجه می‌شود که اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2=0$، یعنی $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ عمود بر یکدیگرند. بنابراین، ثابت کردیم که اگر تمامی مقادیر ویژه متفاوت باشند، آن‌گاه سه جهت اصلی، متقابلاً عمود بر هم می‌باشند.

دیگر این‌که، فرض کنید $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دو بردار ویژه متناظر با یک مقدار ویژه λ باشند. طبق تعریف $\mathbf{Tn}_1=\lambda\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{Tn}_2=\lambda\mathbf{n}_2$ بوده و برای عددیهای دلخواه α و β داریم:
$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2)\equiv\alpha\mathbf{Tn}_1+\beta\mathbf{Tn}_2=\lambda(\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2)$، یعنی $\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2$ نیز یک بردار ویژه با همان مقدار ویژه λ می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر دو بردار ویژه متفاوت با یک مقدار ویژه وجود داشته باشند، آن‌گاه بی‌نهایت بردار ویژه با مقدار ویژهٔ واحد (که یک صفحه تشکیل می‌دهند) وجود خواهد داشت. این

45 - Principal directions

46. Principal values

موقعیت هنگامی رخ می‌دهد که معادله مشخصه دارای یک ریشه مضاعف باشد. فرض کنید که معادله مشخصه، دارای ریشه‌های λ_1، $\lambda_2=\lambda_3=\lambda(\lambda_1\neq\lambda)$ باشد. اگر $\mathbf{n}_1$ بردار ویژه متناظر با λ_1 باشد، $\mathbf{n}_1$ بر هر بردار ویژه λ عمود است. حال متناظر با λ، معادلات:

$$(T_{11}-\lambda)\alpha_1+T_{12}\alpha_2+T_{13}\alpha_3=0,$$

$$T_{21}\alpha_1+(T_{22}-\lambda)\alpha_2+T_{23}\alpha_3=0,$$

$$T_{31}\alpha_1+T_{32}\alpha_2+(T_{33}-\lambda)\alpha_3=0$$

به یک معادله مستقل تقلیل می‌یابند (مثال ۲ـ۱۶ را ببینید)، به گونه‌ای که بی‌نهایت بردار ویژهٔ واقع در صفحه‌ای که $\mathbf{n}_1$ عمود بر آن است، وجود خواهد داشت. بنابراین مجدداً سه جهت اصلی که متقابلاً بر یکدیگر عمودند، وجود خواهد داشت (هر چند که منحصر بفرد نیستند).

در حالتی‌که هر سه ریشه برابر باشند، سه معادله فوق، به‌صورت خودکار برای هر مقدار $(\alpha_1،\alpha_2،\alpha_3)$ ارضا می‌شود، به‌طوری که هر برداری یک بردار ویژه می‌باشد.*

بنابراین، برای هر تانسور متقارن حقیقی، حداقل یک ترياد (مجموعهٔ سه‌تایی) از جهات (که دوبدو برهم عمودند)، وجود دارد.

۲ ب ۱۴ - ماتریس یک تانسور نسبت به جهات اصلی

نشان داده شد که برای یک تانسور متقارن حقیقی، همواره سه جهت اصلی وجود دارند که متقابلاً بر یکدیگر عمودند. فرض کنید که $\mathbf{n}_1$، $\mathbf{n}_2$، $\mathbf{n}_3$ بردارهای یکه در راستای این جهات باشند. با استفاده از $\mathbf{n}_1$، $\mathbf{n}_2$، $\mathbf{n}_3$ به عنوان بردارهای پایه، مولفه‌های تانسور عبارت‌اند از:

$$T_{11}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{T}\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_1\cdot(\lambda_1\mathbf{n}_1)=\lambda_1,$$

$$T_{22}=\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{T}\mathbf{n}_2=\mathbf{n}_2\cdot(\lambda_2\mathbf{n}_2)=\lambda_2,$$

$$T_{33}=\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{T}\mathbf{n}_3=\mathbf{n}_3\cdot(\lambda_3\mathbf{n}_3)=\lambda_3,$$

---

* در حقیقت نشان دادن این مطلب مشکل نیست که: تانسورهایی که همهٔ بردارها، بردار ویژه آنها محسوب می‌شوند، فقط به شکل $\alpha\mathbf{I}$ هستند که α یک عدد و $\mathbf{I}$ تانسور واحد است. واضح است که هرسه ریشه معادله مشخصه $\alpha\mathbf{I}$، α می‌باشد.

$$T_{12} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{n}_2) = 0 = T_{21},$$

$$T_{13} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \cdot (\lambda_3 \mathbf{n}_3) = 0 = T_{31},$$

و

$$T_{23} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \cdot (\lambda_3 \mathbf{n}_3) = 0 = T_{32}.$$

یعنی

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(ب ۳۹)}$$

ماتریس، قطری بوده، اجزاء قطری، مقادیر ویژه $\mathbf{T}$ می‌باشند.

اینک نشان می‌دهیم که مقادیر اصلی تانسور $\mathbf{T}$ مشتمل بر حداکثر و حداقل مقادیری است که اجزای قطری ماتریس $\mathbf{T}$ می‌تواند دارا باشد.

نخست برای هر بردار یکه $\mathbf{e}_1' = \alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 + \gamma\mathbf{n}_3$

$$T_{11}' = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1' = [\alpha, \beta, \gamma] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

یعنی

$$T_{11}' = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2.$$

بدون از دست دادن کلیت اگر $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3,$

آن گاه باتوجه‌به‌اینکه $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$، داریم:

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geqslant \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2,$$

یعنی:

$$\lambda_1 \geqslant T_{11}'.$$

همچنین:

$$\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2 \geqslant \lambda_3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \lambda_3,$$

یعنی:

$$T_{11}' \geqslant \lambda_3.$$

بنابراین اندازهٔ حداکثر (حداقل) مقادیر اصلی $\mathbf{T}$، اندازه حداکثر (حداقل) اجزای قطری تمامی عناصر $[\mathbf{T}]$ از $\mathbf{T}$ می‌باشد.

۲ ب ۱۵ - پایاهای عددی یک تانسور[۴۸]

معادله مشخصه تانسور T، $|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$ یک معادله درجه سه بر حسب λ می‌باشد. معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{ب ۴۰}$$

که

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}), \tag{ب ۴۱}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

چون مطابق با تعریف، مقادیر ویژه T وابسته به انتخاب بردارهای پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ نیستند، ضرایب معادله درجه ۳ باید برای همه $\{e_1, e_2, e_3\}$ یکسان‌باشد* . آنها پایاهای عددی T خوانده می‌شوند. توجه شود که برحسب مقادیر ویژهٔ T (که ریشه‌های معادله (ب ۴۰) می‌باشند) I_i شکل ساده‌تر زیر را می‌گیرد:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \tag{ب ۴۲}$$

**

و

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

مثال ۲-۱۷

برای تانسور مثال ۲-۱۴، نخست پایاهای عددی را بیابید، و سپس مقادیر ویژه را با استفاده از معادله (ب ۴۰) محاسبه کنید.

حل: ماتریس T عبارت است از:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

---

48 - Scalar Invariants of a Tensor

* این مطلب را به صورت مستقیم می‌توان اثبات نمود. مثال ۲-۷ را برای I_1 و مسائل ب ۲۰ و ب ۲۱ را ببینید.

** این پایاها برای تانسورهای پادمتقارن نیز می‌باشند.

بنابراین پایاهای عددی عبارت‌اند:

$$I_1 = 2+3-3 = 2,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -25,$$

$$I_3 = |\mathbf{T}| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -50.$$

این مقادیر، معادله مشخصه زیر را بدست می‌دهند:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$$

یا:

$$(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+5) = 0.$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارت اند از: $\lambda = 2, 5, -5.$

۲ ب ۱۶ - توابع با ارزش تانسوری یک عددی

فرض شود که $\mathbf{T}=\mathbf{T}(t)$ یک تابع با ارزش تانسوری عددی t (نظیر زمان) باشد. مشتق $\mathbf{T}$ نسبت به t (که به عنوان یک تانسور مرتبه دو تعریف می‌شود) توسط عبارت زیر ارائه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{T}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t}. \tag{ب ۴۳}$$

اتحادهای زیر را به سادگی می‌توان استخراج نمود [تنها معادله (ب ۴۴ ت) در این جا اثبات خواهد شد]:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}+\mathbf{S}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \tag{ب ۴۴ الف}$$

$$\frac{d}{dt}\{\alpha(t)\mathbf{T}\} = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{T} + \alpha\frac{d\mathbf{T}}{dt}, \tag{ب ۴۴ ب}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{TS}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{S} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{S}}{dt}, \tag{ب ۴۴ پ}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \tag{ب ۴۴ ت}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^T. \tag{ب ۴۴ ث}$$

برای اثبات معادله (ب ۴۴ ت)، ما از تعریف (ب ۴۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)+\mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)\}\mathbf{a}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t)\{\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t)\}}{\Delta t}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a}+\mathbf{T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

مثال ۲-۱۸

نشان دهید که در مختصات دکارتی، مولفه‌های $d\mathbf{T}/dt$، یعنی $(d\mathbf{T}/dt)_{ij}$ توسط مشتقات مولفه‌ها، یعنی dT_{ij}/dt، داده می‌شوند.

حل:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{Te}_j.$$

چون:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}=\frac{d\mathbf{e}_2}{dt}=\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}=0.$$

بنابراین:

$$\frac{dT_{ij}}{dt}=\mathbf{e}_i\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{Te}_j)=\mathbf{e}_i\cdot\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)\mathbf{e}_j=\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{ij}.$$

مثال ۲-۱۹

نشان دهید که برای یک تانسور متعامد $\mathbf{Q}(t)$، $(d\mathbf{Q}/dt)\mathbf{Q}^T$ یک تانسور پاد متقارن است.

حل: چون $\mathbf{QQ}^T=\mathbf{I}$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=0,$$

یعنی :

$$\mathbf{Q}\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T.$$

چون:

$$\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T,$$

[معادله (ب ۴۴ ث) را ببینید]

بنابراین :

$$\mathbf{Q}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T.$$

اما:

$$\mathbf{Q}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)^T=\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T\right)^T,$$

[معادله (ب ۲۴) را ببینید]

بنابراین:
$$\left\{\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T\right\}^T = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\mathbf{Q}^T.$$

مثال ۲-۲۰

چرخش جسم صلب وابسته به زمان، حول یک نقطه ثابت را می‌توان توسط تانسور چرخش $\mathbf{R}(t)$ نشان داد، به طوری که بردار موقعیت $\mathbf{r}_0$ توسط این چرخش به بردار $\mathbf{r}(t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0$ تبدیل شود. معادله زیر را استخراج کنید:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}.$$

حل: از $\mathbf{r}=\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0$ داریم:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{r}_0 = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^T\right)\mathbf{r}.$$

اما $(d\mathbf{R}/dt)\mathbf{R}^T$ یک تانسور پادمتقارن است (مثال ۲-۱۹ را ببینید)، بنابراین

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^T\right)\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

که $\boldsymbol{\omega}$ بردار دوگان $\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\ \mathbf{R}^T\right)$ می‌باشد.

از معادله مشهور سینماتیک اجسام صلب، درمی‌یابیم که $\boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای جسم است.

۲ ب ۱۷ - میدان عددی، گرادیان یک تابع عددی

فرض کنید که $\phi(\mathbf{r})$ یک تابع عددی از بردار موقعیت $\mathbf{r}$ باشد. یعنی برای هر موقعیت $\mathbf{r}$، ϕ مقدار یک عددی را به دست می‌دهد: نظیر چگالی، درجه حرارت یا پتانسیل الکتریکی در یک نقطه. به عبارت دیگر، $\phi(\mathbf{r})$ یک میدان عددی[۵۱] را توصیف می‌کند. در مقابل میدان عددی، یک میدان برداری وجود دارد که گرادیان ϕ خوانده می‌شود، و از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. گرادیان ϕ تعریف شده در نقطه $\mathbf{r}$، یک بردار است که با $\nabla\phi$ نشان داده می‌شود، به طوری که حاصل ضرب عددی آن با $d\mathbf{r}$ تفاوت مقادیر آن عددی را در $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ به دست دهد، یعنی:

$$d\phi = \phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}. \tag{ب ۴۵}$$

اجازه دهید که dr نمایشگر مقدار $d\mathbf{r}$ بوده، $\mathbf{e}$ برداری که در جهت $d\mathbf{r}$ باشد (توجه کنید که $\mathbf{e}=d\mathbf{r}/dr$)

51 - Scalar field

پس، از معادله فوق خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{in e-direction}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}. \qquad (\text{ب } ۴۶)$$

یعنی مولفه $\nabla\phi$ در جهت $\mathbf{e}$، نرخ تغییر ϕ در آن جهت را می‌دهد (مشتق جهت‌دار [۵۲]).

چون

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_1\text{-direction}} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_1 = (\nabla\phi)_1,$$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_2\text{-direction}} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_2 = (\nabla\phi)_2,$$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_3\text{-direction}} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_3 = (\nabla\phi)_3,$$

بنابراین، مولفه‌های دکارتی $\nabla\phi$ عبارت اند از $\partial\phi/\partial x_i$، یعنی:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i. \qquad (\text{ب } ۴۷)$$

بردار گرادیان، یک تفسیر هندسی ساده دارد: برای هر سطح که روی آن مقدار ϕ ثابت است، برای هر $d\mathbf{r}$ مماس بر سطح، $d\phi=0$ است. بنابر این $\nabla\phi.d\mathbf{r}=0$، به طوری که $\nabla\phi$ عمود بر سطحِ با ϕ ثابت می‌باشد. پس اگر $d\mathbf{r}$ عمود بر سطح با ϕ ثابت باشد، $d\phi$ بیشترین است.

مثال ۲-۲۱

اگر $\phi=xy+z$ باشد، بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ عمود بر سطح با ϕ ثابت را که از (۰،۱،۲) می‌گذرد، بیابید.

حل:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 = y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

در نقطه (۰،۱،۲)، $\nabla\phi = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. بنابراین

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

مثال ۲-۲۲

اگر $\mathbf{q}$ نمایش دهنده بردار شار حرارتی [۵۳] ($\frac{\text{نرخ انتقال حرارت}}{\text{مساحت}}$) باشد، قانون انتقال حرارت فوریه [۵۴] بیان می‌کند که

---

52 - directional derivative

53 - heat flux vector

54 - Fourier heat conduction

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta,$$

که θ میدان درجه حرارت و k ضریب هدایت گرمایی است. اگر $\theta=2(x^2+y^2)$ باشد، $\mathbf{q}$ را در (۱،۰) A و (۱،۱) B بیابید. منحنیهای با θ ثابت را بکشید (ایزوترمها) و بردارهای $\mathbf{q}$ را در دو نقطه نشان دهید.

حل:

$$\nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\theta}{\partial y}\mathbf{e}_2 = 4x\mathbf{e}_1 + 4y\mathbf{e}_2.$$

بنابراین

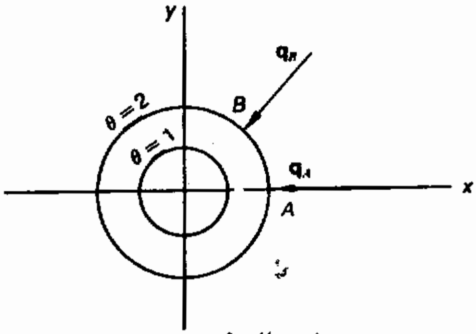
$$\mathbf{q} = -4k(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2).$$

در A

$$\mathbf{q}_A = -4k\mathbf{e}_1$$

و در B

$$\mathbf{q}_B = -4k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$



شکل ۲-۵

مثال ۲-۲۳

قانون عمومی‌تر هدایت حرارتی را می‌توان به شکل زیر نوشت $\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla\theta,$

که در آن، $\mathbf{k}$ تانسوری است که به عنوان تانسور رسانایی گرمایی[55] شناخته می‌شود.

(الف) تانسور $\mathbf{k}$ در ارتباط با قانون هدایت حرارتی فوریه در مثال فوق چیست؟

(ب) اگر $\mathbf{k}$ متقارن باشد، نشان دهید که حداقل سه جهت وجود دارد که در آن جهت سیلان حرارتی عمود بر سطح با دمای ثابت می‌باشند.

(ج) اگر $\theta=2x+3y$ و

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

باشند، $\mathbf{q}$ را یافته و جهت آن را رسم نمایید.

55 - thermal conductivity tensor

حل: (الف) $\mathbf{k}=+k\mathbf{I}$ به طوری که $\mathbf{q}=k\mathbf{I}\nabla\theta=-k\nabla\theta$

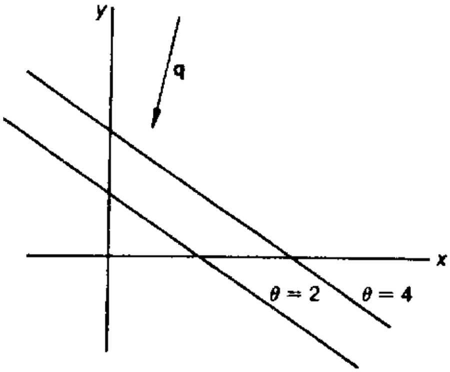
(ب) برای $\mathbf{k}$ متقارن از بخش ۲ ب ۱۳ می‌دانیم که حداقل سه جهت $(\nabla\theta)^{(1)}$ ، $(\nabla\theta)^{(2)}$ و $(\nabla\theta)^{(3)}$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$\mathbf{q}^{(1)}=-\mathbf{K}(\nabla\theta)^{(1)}=-k_1(\nabla\theta)^{(1)},$$

$$\mathbf{q}^{(2)}=-\mathbf{K}(\nabla\theta)^{(2)}=-k_2(\nabla\theta)^{(2)},$$

$$\mathbf{q}^{(3)}=-\mathbf{K}(\nabla\theta)^{(3)}=-k_3(\nabla\theta)^{(3)},$$

که در آن، k_1، k_2 و k_3 مقادیر ویژه $\mathbf{k}$ می‌باشند. اگر $k_1\neq k_2\neq k_3$ باشد، معادلات، مبین تفاوت رسانایی گرمایی در سه جهت اصلی بوده و ماده ناهمسانگرد[56] نسبت به هدایت حرارتی گفته می‌شود.



شکل ۲-۶

(پ) $\nabla\theta=2\mathbf{e}+3\mathbf{e}$ و

$$[\mathbf{q}]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\\0\end{bmatrix},$$

یعنی

$$\mathbf{q}=-\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2.$$

۲ ب ۱۸ - میدان برداری، گرادیان یک میدان برداری

اگر $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری از موقعیت باشد که به عنوان مثال میدان تغییر مکان یا سرعت را توصیف کند، وابسته به $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ یک میدان تانسوری وجود دارد که گرادیان $\mathbf{V}$ خوانده می‌شود و از اهمیت قابل

---

56 - anisotropic

ملاحظه‌ای برخوردار است. گرادیان $\mathbf{v}$ (که توسط $(\nabla \mathbf{v})$ نمایش داده می‌شود) به عنوان تانسور مرتبه دو تعریف می‌شود که وقتی روی $d\mathbf{r}$ عمل می‌کندو تفاوت $\mathbf{v}$ در $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ را به دست می‌دهد. یعنی:

$$d\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla \mathbf{v})d\mathbf{r}. \tag{ب ۴۸}$$

مجدداً اگر dr بیانگر $|d\mathbf{r}|$ بوده و $\mathbf{e}$ نمایشگر $d\mathbf{r}/dr$ باشد، داریم:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in e-direction}} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}. \tag{ب ۴۹}$$

بنابر این، تانسور مرتبه دوم* $(\nabla \mathbf{v})$ بردار یکهٔ $\mathbf{e}$ را به بردار یکهٔ توصیفگر نرخ تغییر $\mathbf{V}$ در آن جهت، تبدیل می‌کند. چون:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_1\text{-direction}} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_1,$$

بنابراین، در مختصات دکارتی

$$(\nabla \mathbf{v})_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}).$$

یعنی

$$(\nabla \mathbf{v})_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}.$$

و یا به طور کلی:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in } \mathbf{e}_j\text{-direction}} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_j, \tag{ب ۵۰}$$

بنابراین

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{v})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}), \tag{ب ۵۱}$$

به طوری که مولفه‌های دکارتی $(\nabla \mathbf{v})$ عبارت‌اند از*:

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{ب ۵۲ الف}$$

یعنی

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \tag{ب ۵۲ ب}$$

---

* می‌توان نشان داد که $(\nabla \mathbf{v})$ بدان‌گونه که تعریف شد، یک تبدیل خطی است. از اثبات صرف‌نظر می‌کنیم.

* علامت گذاری $\nabla \mathbf{v}$ در اینجا به تبعیت از دائرةالمعارف فیزیک Encyclopedia of physics (۱۹۶۵) III/۳ است. این علامت یک علامت اختصاری (grad$\mathbf{V}$) است، که نباید به عنوان حاصل ضرب دیادیک عامل $\nabla_d \equiv \mathbf{e}_i\, \partial/\partial x_i$ و $\mathbf{V}$ تعبیر شود. در حقیقت: $\nabla \mathbf{v} = (\nabla_d \mathbf{v})^T \equiv \mathbf{v}\nabla_d$.

تفسیر هندسی $\nabla \mathbf{v}$ بعداً در ارتباط با سینماتیک تغییر شکل ارائه خواهد شد.

۲ ب ۱۹ - اثر یک تانسور مرتبه دو

اثر[۵۹] هر دیاد ab یک عددی است که به صورت a.b تعریف می‌شود. یعنی:

$$\operatorname{tr} \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{ب ۵۳}$$

و نیز اثر مجموع دیادها به عنوان مجموع اثرها تعریف می‌شود. یعنی

$$\operatorname{tr} (\alpha\, \mathbf{ab} + \beta \mathbf{cd}) = \alpha \operatorname{tr} \mathbf{ab} + \beta \operatorname{tr} \mathbf{cd}. \tag{ب ۵۴}$$

فرض شود که $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$، که $\mathbf{e}_i$ بردارهای پایه در مختصات دکارتی باشند، داریم:

$$[\mathbf{ab}]_{\mathbf{e}_i} \text{ مجموع اعضای قطری } = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i = \operatorname{tr} \mathbf{ab} \tag{ب ۵۵}$$

چون هر تانسور مرتبه دو T را می‌توان به صورت زیر نوشت [معادله (ب ۱۲) را ببینید]:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

بنابراین، اثر T را بدین صورت می‌توان به دست آورد:

$$\operatorname{tr} \mathbf{T} = \operatorname{tr} (T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = T_{ij} \operatorname{tr} (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = T_{ij}\delta_{ij},$$

یعنی:

$$\operatorname{tr} \mathbf{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \tag{ب ۵۶}$$

واضح است که: $\operatorname{tr} \mathbf{T}^T = \operatorname{tr} \mathbf{T}$

مثال ۲-۲۴

نشان دهید که برای هر تانسور مرتبه دوی A و B، $tr(\mathbf{AB})=tr(\mathbf{BA})$

حل: فرض شود $\mathbf{C}=\mathbf{BA}$، پس $C_{ij}=B_{im}A_{mj}$. بنابراین: $\operatorname{tr} \mathbf{AB} = \operatorname{tr} \mathbf{C} = C_{ii} = A_{im}B_{mi}$.

فرض شود $\mathbf{D}=\mathbf{BA}$، آن گاه: $D_{ij}=B_{im}A_{mj}$، و $\operatorname{tr} \mathbf{BA} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = D_{ii} = B_{im}A_{mi}$.

اما $B_{im}A_{mi}=B_{mi}A_{im}$ (تغییر شاخصهای کاذب)، یعنی:

$$\operatorname{tr} \mathbf{BA} = \operatorname{tr} \mathbf{AB}.$$

59 - trace

مثال ۲-۲۵

نشان دهید که اگر $\mathbf{T}$ یک تانسور متقارن و $\mathbf{W}$ تانسور پاد متقارن باشند، آن گاه $\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = 0$

حل: داریم :
$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{TW})^T = \mathrm{tr}\,(\mathbf{W}^T\mathbf{T}^T).$$

چون $\mathbf{T}$ متقارن و $\mathbf{W}$ پادمتقارن است، لذا $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$ و $\mathbf{W}=-\mathbf{W}^T$. بنابراین:

(مثال قبل را ببینید)
$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = -\mathrm{tr}\,(\mathbf{WT}) = -\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW})$$

در نتیجه:
$$2\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = 0.$$

یعنی
$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = 0.$$

۲ ب ۲۰ - دیورژانس یک میدان برداری و دیورژانس یک میدان تانسوری

فرض کنید که $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری باشد. دیورژانس[۶۰] $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ به صورت یک میدان عددی تعریف و توسط اثر گرادیان $\mathbf{V}$ داده می‌شود. یعنی:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} \equiv \mathrm{tr}\,(\nabla\mathbf{v}). \qquad \text{(ب ۵۷)}$$

نسبت به مبنای دستگاه مختصات دکارتی، اجزای قطری $\nabla\mathbf{v}$ عبارت‌اند از $\partial v_1/\partial x_1$ ، $\partial v_2/\partial x_2$ و $\partial v_3/\partial x_3$

بنابراین:
$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \qquad \text{(ب ۵۸)}$$

فرض شود که $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ یک میدان تانسوری مرتبه دو باشد. دیورژانس $\mathbf{T}$ تعریف می‌شود که یک میدان برداری بوده، با $div\mathbf{T}$ نشان داده می‌شود، به گونه‌ای که برای هر بردار $\mathbf{a}$ داریم:

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{T})\cdot\mathbf{a} \equiv \mathrm{div}\,(\mathbf{T}^T\mathbf{a}) - \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}^T(\nabla\mathbf{a})). \qquad \text{(ب ۵۹)}^*$$

برای یافتن مولفه‌های بردار $div\mathbf{T}$، فرض شود $\mathbf{b}\equiv div\mathbf{T}$، پس (توجه شود که برای مختصات دکارتی $\nabla\mathbf{e}_i=0$ است):

$$b_i = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_i = \mathrm{div}\,(\mathbf{T}^T\mathbf{e}_i) - \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}^T\nabla\mathbf{e}_i) = \mathrm{div}\,(T_{im}\mathbf{e}_m) - 0 = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} - 0.$$

---

60 - divergence

* برخی از مولفین $div\mathbf{T}$ را بدین گونه تعریف می‌کنند: برای هر ثابت $\mathbf{a}$، $(div\mathbf{T})\cdot\mathbf{a}\equiv div(\mathbf{T}^T\mathbf{a})$. همچنین در نمادگذاری دیادی، $div\mathbf{T}=\mathbf{T}\cdot\nabla_a$، که $\nabla_a\equiv\mathbf{e}_i(\frac{\partial}{\partial x_i})$ است.

به عبارت دیگر:

$$\mathbf{div\,T} = \mathbf{b} = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m}\mathbf{e}_i.$$

(ب ۶۰)

مثال ۲-۲۶

اگر $\alpha=\alpha(\mathbf{r})$ و $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r})$ باشند، نشان دهید که $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\operatorname{div}\mathbf{a} + (\nabla\alpha)\cdot\mathbf{a}.$

حل: فرض شود $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ آن‌گاه $b_i=\alpha_i\, a_i$ و

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha a_i) = \alpha\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)a_i$$
$$= \alpha\operatorname{div}\mathbf{a} + (\nabla\alpha)\cdot\mathbf{a}.$$

مثال ۲-۲۷

$\alpha(\mathbf{r})$ و $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ داده شده است، نشان دهید که $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{T}) = \mathbf{T}(\nabla\alpha) + \alpha\operatorname{div}\mathbf{T}$

حل: از معادله (ب ۶۰) داریم:

$$\operatorname{div}(\alpha\mathbf{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha T_{ij})\mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)T_{ij}\mathbf{e}_i + \alpha\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i.$$

اما

$$T_{ij}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\mathbf{e}_i = \mathbf{T}(\nabla\alpha)$$

و

$$\alpha\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i = \alpha\operatorname{div}\mathbf{T},$$

بنابراین نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۲ب ۲۱ -کرل یک میدان برداری

فرض شود که $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری باشد. کرل[۶۲] $\mathbf{v}$ چنین تعریف می‌شود: یک میدان برداری است که توسط بردار دوگان بخش پاد متقارن $\nabla\mathbf{v}$ داده می‌شود. یعنی:

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} \equiv 2\mathbf{t}^A, \qquad (\text{ب } ۶۱)$$

که $\mathbf{t}^A$ بردار دوگان $(\nabla\mathbf{v})^A$ می‌باشد.

62 - Curl

در مبنای مختصات دکارتی:

$$[\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین کرل V توسط عبارت زیر داده می‌شود [معادله ب ۳٦ الف را ببینید]:

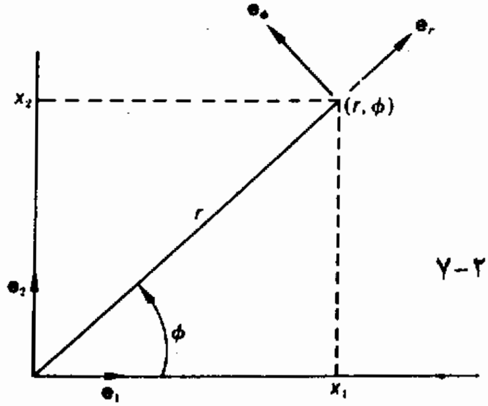
$$\mathbf{curl}\ \mathbf{v} = 2\mathbf{t}^A = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \qquad (ب\ ٦٢)$$

۲ ب ۲۲ - مختصات قطبی

در این بخش، از تعاریف پایای ∇f ، $\nabla \mathbf{v}$ ، $div\mathbf{V}$ ، $Curl\mathbf{V}$ ، $div\mathbf{T}$ برای محاسبه مولفه‌های آنها در دستگاه مختصات قطبی مستوی استفاده خواهد شد. همین روش استخراج را به سادگی برای به دست آوردن مولفه‌های آنها در دستگاههای مختصات خمیدهٔ متعامد (نظیر استوانه‌ای، کروی، و غیره) می‌توان به کار گرفت.

فرض شود که r و ϕ (شکل ۲-۷ را ببینید) مختصات قطبی مستوی را نشان دهند به طوری که:

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad \phi = \tan^{-1} x_2/x_1.$$



شکل ۲-۷

بردارهای یکه پایه $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\phi$ را برحسب بردارهای پایه دکارتی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بدین صورت می‌توان نمایش داد:

$$\mathbf{e}_r = \cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_2, \tag{ب ۶۳ الف}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_1 + \cos\phi\mathbf{e}_2. \tag{ب ۶۳ ب}$$

جهت این بردارهای یکه پایه، با تغییرات ϕ تغییر می‌کند. در حقیقت، از معادلات (ب ۶۳ الف) و (ب ۶۳ ب) به سادگی استخراج می‌شود که:

$$d\mathbf{e}_r = d\phi\mathbf{e}_\phi, \tag{ب ۶۴ الف}$$

$$d\mathbf{e}_\phi = -d\phi\mathbf{e}_r. \tag{ب ۶۴ ب}$$

از بردار موقعیت $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$، داریم:
$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\mathbf{e}_r.$$

با استفاده از معادله (ب ۶۴) به دست می‌آید:

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\phi\mathbf{e}_\phi. \tag{ب ۶۵}$$

مولفه ∇f ، $\nabla\mathbf{v}$ و غیره اینک حاصل می‌شود.

(الف) مولفه‌های ∇f:

فرض کنید $f(r,\phi)$ یک میدان عددی باشد. طبق تعریف گرادیان f، داریم

$$df = (\nabla f)\cdot dr = [(\nabla f)_r\mathbf{e}_r + (\nabla f)_\phi\mathbf{e}_\phi]\cdot[dr\mathbf{e}_r + rd\phi\mathbf{e}_\phi].$$

یعنی:

$$df = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\phi rd\phi. \tag{ب ۶۶}$$

اما از ریاضیات داریم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi. \tag{ب ۶۷}$$

چون معادلات (ب ۶۶) و (ب ۶۷) باید برای تمامی نموهای[۶۳] dr و $d\phi$، نتایج واحدی ارائه دهند، داریم:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi. \tag{ب ۶۸}$$

(ب) مولفه‌های $(\nabla\mathbf{v})$:

---

63 - increments

فرض کنید:

$$\mathbf{v}(r,\phi)=v_r(r,\phi)\mathbf{e}_r+v_\phi(r,\phi)\mathbf{e}_\phi. \qquad \text{(ب ۶۹)}$$

طبق تعریف $(\nabla\mathbf{v})$ داریم:

$$d\mathbf{v}\equiv(\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}=(\nabla\mathbf{v})(dr\mathbf{e}_r+rd\phi\mathbf{e}_\phi)=dr(\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_r+rd\phi(\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_\phi.$$

حال*: $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_\phi=(\nabla\mathbf{v})_{r\phi}\mathbf{e}_r+(\nabla\mathbf{v})_{\phi\phi}\mathbf{e}_\phi$ و $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_r=(\nabla\mathbf{v})_{rr}\mathbf{e}_r+(\nabla\mathbf{v})_{\phi r}\mathbf{e}_\phi$

بنابراین:

$$d\mathbf{v}=[(\nabla\mathbf{v})_{rr}dr+(\nabla\mathbf{v})_{r\phi}rd\phi]\mathbf{e}_r+[(\nabla\mathbf{v})_{\phi r}dr+(\nabla\mathbf{v})_{\phi\phi}rd\phi]\mathbf{e}_\phi. \qquad \text{(ب ۷۰)}$$

اما از معادله (ب ۶۹) داریم: $d\mathbf{v}=dv_r\mathbf{e}_r+v_rd\mathbf{e}_r+dv_\phi\mathbf{e}_\phi+v_\phi d\mathbf{e}_\phi,$

و از ریاضیات داریم:

$$dv_r=\frac{\partial v_r}{\partial r}dr+\frac{\partial v_r}{\partial\phi}d\phi \quad \text{و} \quad dv_\phi=\frac{\partial v_\phi}{\partial r}dr+\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}d\phi,$$

پس

$$d\mathbf{v}=\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-v_\phi\right)d\phi\right]\mathbf{e}_r+\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_r\right)d\phi\right]\mathbf{e}_\phi. \qquad \text{(ب ۷۱)}$$

برای توافق و سازگاری معادلات (ب ۷۰) و (ب ۷۱) برای تمامی نمونه‌های dr و $d\phi$ باید داشته باشیم:

$$(\nabla\mathbf{v})_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (\nabla\mathbf{v})_{\phi r}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-v_\phi\right), \text{etc.}$$

و به شکل ماتریسی:

$$[\nabla\mathbf{v}]_{(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\phi)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\phi}-v_\phi\right)\\ \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_r\right)\end{bmatrix}. \qquad \text{(ب ۷۲)}$$

(پ) $Div\mathbf{V}$

با استفاده از مولفه‌های $\nabla\mathbf{v}$ که در (ب) به دست آمده، داریم:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}\equiv\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{v})=(\nabla\mathbf{v})_{rr}+(\nabla\mathbf{v})_{\phi\phi}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_r\right). \qquad \text{(ب ۷۳)}$$

---

* $\mathbf{T}\mathbf{e}_i=T_{ji}\mathbf{e}_j$.

(ت) کرل $\mathbf{V}$:

بخش پاد متقارن $\nabla \mathbf{v}$ عبارت است از :

$$[(\nabla \mathbf{v})^A]_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین از این تعریف که دو برابر دوگان $curl V \equiv (\nabla \mathbf{v})^A$ داریم:

(ب ۷۴)

$$\text{curl } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\mathbf{e}_3.$$

(ث) مولفه‌های $div\mathbf{T}$

تعریف پایای دیورژانس یک تانسور مرتبه دو، عبارت است از:

$$(\mathbf{div\ T}) \cdot \mathbf{a} = \text{div } (\mathbf{T}^T\mathbf{a}) - \text{tr}\{(\nabla \mathbf{a})\mathbf{T}^T\}. \qquad \text{(ب ۷۵)}$$

چون $(div\mathbf{T})_r \equiv (div\mathbf{T}).\mathbf{e}_r$ است، بنابراین از معادله (ب ۷۵) داریم:

$$(\mathbf{div\ T})_r = \text{div } (\mathbf{T}^T\mathbf{e}_r) - \text{tr}\{(\nabla \mathbf{e}_r)\mathbf{T}^T\}. \qquad \text{(ب ۷۶)}$$

با استفاده از معادله (ب ۷۳) نخستین جمله طرف راست معادله (ب ۷۶) را به این صورت به دست می‌آوریم:

$$\text{div } (\mathbf{T}^T\mathbf{e}_r) = \text{div } (T_{rr}\mathbf{e}_r + T_{r\phi}\mathbf{e}_\phi) = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{rr}}{r}.$$

برای محاسبه جمله دوم، نخست از معادله (ب ۷۲) برای به دست آوردن $(\nabla \mathbf{e}_r)$ استفاده می‌کنیم. در حقیقت *:

$$[\nabla \mathbf{e}_r]_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}.$$

بنابراین:

$$\text{tr}\{[\nabla \mathbf{e}_r]\,[\mathbf{T}^T]\} = \text{tr}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{T_{r\phi}}{r} & \frac{T_{\phi\phi}}{r} \end{bmatrix} = \frac{T_{\phi\phi}}{r}.$$

---

* توجه شود $\mathbf{e}_r = (1)\mathbf{e}_r + (0)\mathbf{e}_\phi$

از معادله (ب ۷۶) داریم:

$$(\mathbf{div\ T})_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r}. \qquad \text{(ب ۷۷)}$$

و به روش مشابه به دست می‌آید:

$$(\mathbf{div\ T})_\phi = \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} + T_{\phi r}}{r}. \qquad \text{(ب ۷۸)}$$

مسائل

ب ۱ - تانسور $\mathbf{T}$، هر بردار را به تصویر آینه‌ای خودش نسبت به صفحه‌ای که عمود بر آن است، تبدیل می‌کند.

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

(الف) ماتریس $\mathbf{T}$ را بیابید.

(ب) با استفاده از این تبدیل خطی، تصویر آینه‌ای بردار $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ را به دست آورید.

ب ۲ - تانسور $\mathbf{T}$ بردار $\mathbf{a}$ را به بردار $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ تبدیل می‌کند. ماتریس $\mathbf{T}$ را بیابید. هنگامی که مبناها متفاوت باشند، مولفه‌های $\mathbf{T}$ چگونه تغییر می‌کنند.

ب ۳ - ماتریس تانسور $\mathbf{T}$ که بردار $\mathbf{a}$ را به بردار $\mathbf{b}=\mathbf{m}(\mathbf{a}.\mathbf{n})$ تبدیل می‌کند، بیابید، که

$$\mathbf{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

و

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3).$$

این تانسور را به صورت یک حاصلضرب دیادیک بنویسید.

ب ۴ - ماتریس تانسور $\mathbf{T}$ که هر بردار $\mathbf{a}$ را به بردلر $\mathbf{b}=\mathbf{m}\times\mathbf{a}$ تبدیل می‌کند، به دست آورید، که $\mathbf{m}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$. ثابت کنید که $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است.

ب ۵ - تبدیل $\mathbf{T}$ روی بردار $\mathbf{a}$ عمل کرده و می‌دهد $\mathbf{T}\mathbf{a}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$، که $|\mathbf{a}|$ مقدار $\mathbf{a}$ می‌باشد. آیا $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است؟

ب ۶ - (الف) تانسور $\mathbf{T}_1$ هر برداری را به تصویر آینه‌ای خود در صفحه‌ای که $\mathbf{e}_2$ عمود بر آن است، تبدیل می‌کند، ماتریس این تانسور را بیابید. ماتریس تانسور مرتبه دو $\mathbf{T}_2$ که هر برداری را 45° راستگرد

حول محور e_1 می‌چرخاند، به دست آورید.

(ب) ماتریس تانسوری که هر برداری را با ترکیب نخست، انعکاس و سپس چرخش بند (الف) تبدیل می‌کند، بیابید.

(پ) بند (ب) را در صورتی که نخست چرخش و در پی آن انعکاس باشد، انجام دهید.

ب ۸ - برای تانسورهای اختیاری $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$، بدون توجه به شکل مولفه‌ای، ثابت کنید که:

(الف) $\mathbf{T}^T+\mathbf{S}^T=(\mathbf{T}+\mathbf{S})^T$،

(ب) $(\mathbf{TS})^T=\mathbf{S}^T\mathbf{T}^T$.

ب ۹ - با انتخاب بردارهای معین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و یک تبدیل خطی $\mathbf{T}$، نامساوی $\mathbf{T}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\neq\mathbf{a}\times\mathbf{Tb}+\mathbf{Ta}\times\mathbf{b}$ را ثابت کنید.

ب ۱۰ - فرض کنید که تبدیل خطی $\mathbf{Q}$ اتحاد $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ را ارضا کند.

(الف) فرض کنید $\mathbf{Qa}=\mathbf{b}$، که $\mathbf{b}$ یک بردار دلخواه است. نشان دهید که: $\mathbf{QQ}^T=\mathbf{I}$

(ب) نشان دهید که هر دوی $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}^T$ تبدیلات متعامد می‌باشند.

ب ۱۱ - چرخشهای جسم صلب کوچک را می‌توان توسط تبدیل متعامد $\mathbf{R}=\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{R}$ توصیف نمود، که $\varepsilon\to 0$، هنگامی که زاویه چرخش به صفر نزدیک می‌شود. دو چرخش پیاپی $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ را در نظر بگیرید، نشان دهید که برای چرخشهای کوچک (به طوری که جملات ε^2 را در مقایسه با ε بتوان صرفنظر کرد)، نتیجه نهایی وابسته به ترتیب چرخشها نیست.

ب ۱۲ - فرض کنید که $\mathbf{Q}$ یک تبدیل متعامد از مختصات را تعریف کند، به طوری که $\mathbf{e}_i'=Q_{mi}\mathbf{e}_m$. با لحاظ $\mathbf{e}_i'.\mathbf{e}_j'$ ثابت کنید که: $Q_{mi}Q_{mj}=\delta_{ij}$

ب ۱۳ - مبنای $\mathbf{e}_i'$ از دوران مبنای $\mathbf{e}_i$ حول $\mathbf{e}_3$ به اندازه 30° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حاصل شده است.

(الف) تبدیل متعامد $\mathbf{Q}$ را (که این تغییر مبنا را تعریف می‌کند) یعنی $\mathbf{e}_i'=Q_{mi}\mathbf{e}_m$، بیابید.

(ب) با استفاده از قانون تبدیل بردار، مولفه‌های $\mathbf{a}=\sqrt{3}\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ را در مبنای پریم‌دار به دست آورید (یعنی a_i' را بیابید).

(پ) بند ب را به صورت هندسی انجام دهید.

ب ۱۴ ـ مسئله ب ۱۳ را هنگامی که $\mathbf{e}_i'$ با ۳۰ درجه دوران $\mathbf{e}_i$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبنای $\mathbf{e}_3$ حاصل شده، حل نمایید.

ب ۱۵ ـ نشان دهید که اگر مولفه‌های یک تانسور، نسبت به یک مبنا تماماً صفر باشند، آن‌گاه آنها نسبت به هر مبنایی صفر خواهند بود.

ب ۱٦ ـ ماتریس تانسور T نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ عبارت است از:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

مقادیر T_{11}'، T_{12}' و T_{31}' را برحسب مبنای قائم $\mathbf{e}_i'$ (که $\mathbf{e}_1'$ در جهت $\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$ ـ و $\mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_1$ می‌باشد) به دست آورید.

ب ۱۷ ـ (الف) برای تانسور مسئله قبل، اگر $\mathbf{e}_i'$ در اثر ۹۰ درجه دوران حول محور $\mathbf{e}_3$ حاصل شود، مقدار $[T'_{ij}]$ را بیابید.

(ب) مجموع اجزای قطری و نیز جمع دترمینانهای $[\mathbf{T}]$ و $[\mathbf{T}]'$ را مقایسه کنید.

ب ۱۸ ـ مسئله ب ۱۷ را برای ۱۸۰ درجه دوران حول محور $\mathbf{e}_3$ حل کنید.

ب ۱۹ ـ ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$ برابر است با a_ib_i. نشان دهید که ضرب داخلی، یک پایای عددی نسبت به یک تبدیل متعامد مختصات می‌باشد.

ب ۲۰ـ(الف) اگر T_{ij} مولفه‌های یک تانسور باشند، نشان دهید که $T_{ij}T_{ij}$ یک پایای عددی نسبت به یک تبدیل متعامد مختصات خواهد بود.

(ب) مقدار $T_{ij}T_{ij}$ را برحسب مبنای $\mathbf{e}_i$ محاسبه کنید:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}.$$

(پ) $[\mathbf{T}]'$ را بیابید، اگر $\mathbf{e}_i'=\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$ و

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}.$$

(ت) برای این $[\mathbf{T}]$ و $[\mathbf{T}]'$ معین، نشان دهید که: $T'_{mn}T'_{mn} = T_{ij}T_{ij}$.

ب ۲۱ - فرض شود که $[\mathbf{T}]$ و $[\mathbf{T}]'$ دو ماتریس از یک تانسور $\mathbf{T}$ باشند. نشان دهید که:

$$\det[\mathbf{T}] = \det[\mathbf{T}]'.$$

ب ۲۲ - برای هر بردار $\mathbf{a}$ و تانسور دلخواه $\mathbf{T}$، نشان دهید که

(الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^A\mathbf{a} = 0,$

(ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^S\mathbf{a}.$

ب ۲۳ - (الف) مولفه‌های یک تانسور مرتبه سه عبارت‌اند از R_{ijk}. نشان دهید که R_{iik} مولفه‌های یک بردار است.

(ب) نتیجه بند (الف) را تعمیم دهید. بدین صورت که مولفه‌های یک تانسور مرتبه n .... R_{ijk} را در نظر بگیرید و نشان دهید که .... R_{iik} مولفه‌های یک تانسور مرتبه $(n-2)$ می‌باشند.

ب ۲۴ - مولفه‌های یک بردار اختیاری $\mathbf{a}$ و یک تانسور مرتبه دو دلخواه $\mathbf{T}$ برای هر مبنای $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ به وسیله کمیت با شاخص سه تایی R_{ijk} به صورت $a_i = R_{ijk}T_{jk}$ مرتبط می‌شوند. ثابت کنید که R_{ijk} مولفه‌های یک تانسور مرتبه سه میباشند.

ب ۲۵ - هر تانسور را می‌توان به یک بخش متقارن و یک بخش پاد متقارن تجزیه نمود. ثابت کنید که این تجزیه منحصر به فرد است. (راهنمایی : فرض کنید که منحصر به فرد نیست).

ب ۲۶ - ماتریس تانسور $\mathbf{T}$ داده شده است:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

(الف) بخشهای متقارن و پاد متقارن $\mathbf{T}$ را بیابید، و (ب) بردار دوگان بخش متقارن $\mathbf{T}$ را به دست آورید.

ب ۲۷ - ثابت کنید که تنها مقادیر ویژه حقیقی و ممکن یک تانسور متعامد $\lambda = +1$ و $\lambda = -1$ می‌باشند.

ب ۲۸ - تانسورهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{S}$ به صورت زیر مرتبط می‌شوند: $\mathbf{T} = \mathbf{RS}$

تانسورهای $\mathbf{R}$ و $\mathbf{S}$ دارای بردار ویژه یکسان $\mathbf{n}$ و مقادیر ویژه متناظر r_1 و s_1 هستند. یک مقدار ویژه و بردار ویژه $\mathbf{T}$ را بیابید.

ب ۲۹ - اگر $\mathbf{n}$ یک بردار ویژه حقیقی از برای تانسور پاد متقارن $\mathbf{T}$ باشد، آن‌گاه نشان دهید که مقدار ویژه متناظر حذف می‌شود.

ب ۳۰ - فرض کنید که $\mathbf{F}$ یک تانسور اختیاری باشد.

(الف) نشان دهید که $\mathbf{FF}^T$ و $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ تانسورهای اختیاری هستند.

می‌توان نشان داد(قضیه تجزیه قطبی[66]) که هر تانسور معکوس شدنی $\mathbf{F}$ را بتوان به صورت $\mathbf{F}=\mathbf{VQ}=\mathbf{Qu}$، (که $\mathbf{Q}$ یک تانسور متعامد و $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ تانسورهای متقارن می‌باشند) نمایش داد.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{UU} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ و $\mathbf{VV} = \mathbf{FF}^T$

(پ) اگر λ_i و $\mathbf{n}_i$ مقایر ویژ و بردارهای ویژه $\mathbf{U}$ باشند، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $\mathbf{V}$ را بیابید.

ب ۳۱ - (الف) بردار ویژه بدیهی ضرب دیادیک $\mathbf{ab}$ چیست؟

(ب) نخستین پایای عددیِ $\mathbf{ab}$ متناظر، چیست؟

(پ) نشان دهید که سومین پایای عددی $\mathbf{ab}$ حذف می‌شود.

ب ۳۲ - تانسور چرخش $\mathbf{R}$ توسط روابط زیرتعریف می‌شود:

$$\mathbf{Re}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Re}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{Re}_3 = \mathbf{e}_1.$$

(الف) ماتریس $\mathbf{R}$ را بیابید و ثابت کنید که $\mathbf{RR}^T=\mathbf{I}$ و $det\,|\mathbf{R}|=1$

(ب) تک محور دورانی را بیابید که می‌توانست این چرخش را ایجاد کند.

ب ۳۳ - برای هر تبدیل چرخشی، مبنایی نظیر $\mathbf{e}_i{}'$ را به گونه‌ای می‌توان انتخاب کرد که $\mathbf{e}_3{}'$ در امتداد محور دوران باشد.

(الف) ثابت کنید که برای زاویه چرخش θ، ماتریس چرخش بر اساس مبنای پریم دار عبارت است از

$$[\mathbf{R}]' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i'} .$$

(ب) بخشهای متقارن و پادمتقارن $[\mathbf{R}]'$ را بیابید.

(پ) نخستین پایای عددی $\mathbf{R}^S$ (یعنی R'_{ii}) را به دست آورید.

66 - polar Decomposition theorem

(ث) بردار دوگان R^4 را بیابید.

(ج) با استفاده از نتایج (ت) و (ث) زاویه چرخش و محور چرخش را برای مسئله ب ۳۲ به دست آورید.

ب ۳۴ - (الف) اگر Q یک تبدیل متعامد ناصحیح[۶۷] (ناکامل) (متناظر با یک انعکاس) باشد، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر Q چه هستند.؟

(ب) اگر ماتریس Q عبارت باشد از:

$$[Q]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

عمود بر صفحه انعکاس را بیابید.

ب ۳۵ - با بسط عبارت زیر، نشان دهید که دومین پایای عددی T عبارت است از:

$$I_2=\frac{T_{ii}T_{jj}}{2}-\frac{T_{ij}T_{ji}}{2}$$

ب ۳٦ - با استفاده از قانون تبدیل ماتریس برای تانسورهای مرتبه دو، نشان دهید که سومین پایای عددی، مستقل از مبنای خاص است.

ب ۳۷ - تانسور T دارای ماتریس زیر است:

$$[T]=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(الف) پایایهای عددی، مقادیر اصلی و جهات اصلی متناظر تانسور T را بیابید.

(ب) اگر n_1، n_2، n_3 جهات اصلی باشند، $[T]_{n_1,n_2,n_3}$ را بنویسید.

(پ) آیا ماتریس زیر می‌تواند تانسور T را نسبت به مبنایی نشان دهد؟

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

ب ۳۸ - مسئله ب ۳۷ را برای ماتریس زیر انجام دهید:

$$[T]=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

67 - improper

ب ۳۹ ـ تانسور $\mathbf{T}$ دارای ماتریس زیر است:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

مقادیر اصلی و سه جهت اصلی عمود بر یکدیگر را بیابید.

ب ۴۰ ـ تانسور اینرسی $\bar{\mathbf{I}}_0$ یک جسم صلب نسبت به نقطه O، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mathbf{I}}_0 = \int (r^2\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{r})\rho \, dV,$$

که در آن، $\mathbf{r}$ بردار موقعیت، $r=|\mathbf{r}|$، ρ = چگالی جرمی، $\mathbf{I}$ تانسور واحد و dV دیفرانسیل حجم میباشند. ممان اینرسی نسبت به محوری که از نقطه O می‌گذرد و توسط $\bar{I}_{nn}=\mathbf{n}\,\bar{\mathbf{I}}_0\,\mathbf{n}$ (جمعی روی n صورت نمی‌گیرد) داده می‌شود که $\mathbf{n}$ بردار یکه در جهت محور مورد نظر می‌باشد.

(الف) نشان دهید که $\bar{\mathbf{I}}_0$ متقارن است.

(ب) فرض کنید $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$، تمامی مولفه‌های $\bar{\mathbf{I}}_0$ را بنویسید.

(پ) مولفه‌های قطری ماتریس انیرسی را ممانهای اینرسی خوانند و مولفه‌های غیر قطری را ضربهای اینرسی. برای چه محورهایی ضربهای اینرسی صفر می‌باشند؟ برای کدام محور ممانهای اینرسی بیشترین (یاکمترین) است؟

اگر چارچوب مختصات $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ به جسم صلب که با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ دوران می‌کند، متصل باشد. آن گاه بردار مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{H}_c$ نسبت به مرکز جرم، توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{H}_c = \bar{\mathbf{I}}_c \boldsymbol{\omega}$$

و

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i.$$

(ت) فرض شود $\boldsymbol{\omega}=\omega_i\mathbf{e}_i$ و نشان دهید که

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_i}{dt}\mathbf{e}_i$$

و این که

$$\dot{\mathbf{H}}_c = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_c = \bar{\mathbf{I}}_c\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\bar{\mathbf{I}}_c \boldsymbol{\omega}).$$

(ث) قانون اولر برای حرکت جسم صلب نیازمند این است که ممان نیروهای خارجی، حول مرکز جرم برابر با نرخ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای باشد، یا: $\mathbf{M}_c = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_c.$

نشان دهید که :

$$\mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_c}{2}\right).$$

این معادله را می‌توان به عنوان تساوی بین نرخ کار ممان خارجی و نرخ تغییر انرژی جنبشی چرخشی تفسیر نمود.

ب ۴۱ - تساویهای (ب ۴۴ الف - ث) بخش ۲ ب ١٦ را اثبات کنید.

ب ۴۲ - میدان عددی تعریف شده توسط $\phi=x^2+3yx-2z$ را در نظر گیرید.

(الف) بردار یکه عمود بر سطح با ϕ ثابت در مبداء (۰، ۰، ۰) را بیابید.

(ب) حداکثر مقدار مشتق جهت دار ϕ در مبدأ چقدر است؟

(پ) مقدار $d\phi/dr$ را اگر $d\mathbf{r}=ds(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)$ باشد، محاسبه کنید.

ب ۴۳ - بیضوی تعریف شده توسط معادله $X^2/a^2+Y^2/b^2+Z^2/c^2=1$ را در نظر بگیرید. بردار یکه عمود در نقطه داده شده (x, y, z) را بیابید.

ب ۴۴ - در یک مسئله هدایت حرارتی مسطح، ایزوترمها توسط $\theta=3xy$ داده شده‌اند.

(الف) شار حرارتی را در نقطه $A(1, 1, 1)$ اگر $\mathbf{q}=-k\nabla\theta$ باشد، بیابید.

(ب) شار حرارتی را در همان نقطه بند (الف) اگر $\mathbf{q}=-\mathbf{K}(\nabla\theta)$ باشد، پیدا کنید، که:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix}.$$

ب ۴۵ - یک پتانسیل الکترواستاتیک $\phi=\alpha[x\cos\theta+y\sin\theta]$ را که α و θ ثابت می‌باشند، در نظر بگیرید.

(الف) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را بیابید، $\mathbf{E}=-\nabla\phi$

(ب) تغییر مکان الکتریکی $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ را پیدا کنید، که در آن ماتریس ϵ عبارت است از:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

(پ) زاویه θ را که تحت آن $[\mathbf{D}]$ حداکثر می‌شود، بیابید.

ب ۴٦ - فرض کنید که $\phi(x, y, z)$ و $\psi(x, y, z)$ توابع عددی موقعیت و $\mathbf{V}(x, y, z)$ و $\mathbf{W}(x, y, z)$

توابع برداری موقعیت باشند. با نوشتن شکل مولفه‌ای شاخص‌دار، تساویهای زیر را اثبات کنید:

(الف) $\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

نمونه حل:

$$[\nabla(\phi+\psi)]_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi+\psi) = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = (\nabla\phi)_i + (\nabla\psi)_i.$$

(ب) $\operatorname{div}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{div}\mathbf{w},$

(پ) $\operatorname{div}(\phi\mathbf{v}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{v} + \phi(\operatorname{div}\mathbf{v}),$

(ت) $\operatorname{curl}(\nabla\phi) = 0,$

(ث) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v}) = 0.$

ب ۴۷ - در دستگاه مختصات استوانه‌ای، با $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\phi$، $\mathbf{e}_z$ که نشانگر بردارهای یکه در جهت مختصات r، ϕ، z می‌باشند داریم $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + (rd\phi)\mathbf{e}_\phi + dz\mathbf{e}_z$ و $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$

از $df \equiv (\nabla f).d\mathbf{r}$ مولفه‌های (∇f) را در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر به دست آورید:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}, \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

ب ۴۸ -میدان برداری $\mathbf{V}=x^2\mathbf{e}_1+z^2\mathbf{e}_2+y^2\mathbf{e}_3$ را در نظر گیرید. برای نقطه (۱،۱،۰):

(الف) ماتریس $\nabla\mathbf{v}$ را بیابید.

(ب) بردار $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ را به دست آورید.

(ج) $div\mathbf{V}$ و $Curl\mathbf{V}$ را پیدا کنید.

(د) اگر $d\mathbf{r}=ds(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$ باشد، دیفرانسیل $d\mathbf{V}$ را بیابید.

ب ۴۹ - (الف) میدان برداری عمومی $\mathbf{V}$ و رابطه $d\mathbf{V}=(\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$ را در نظر گیرید.

اگر $d\mathbf{r}=(dr)\mathbf{n}$ باشد، نشان دهید که: $\left|\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right|^2 = \mathbf{n}\cdot[(\nabla\mathbf{v})^T(\nabla\mathbf{v})]\mathbf{n}.$

جهتی از $\mathbf{n}$ که حداکثر مقدار dv/dr را به دست می‌دهد، چگونه خواهید یافت؟

(ب) $|dv/dr|_{max}$ را بیابید، اگر $\mathbf{V}=z\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$ در A (۲،۲،۲) باشد.

ب ۵۰ - در دستگاه مختصات استوانه‌ای که $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\phi$، $\mathbf{e}_z$ نشانگر بردارهای یکه در جهات r، ϕ، z می‌باشند، بردار $\mathbf{V}$ را می‌توان چنین نوشت: $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\phi\mathbf{e}_\phi + v_z\mathbf{e}_z$

با استفاده از روابط $d\mathbf{e}_r = (d\phi)\mathbf{e}_\phi, \quad d\mathbf{e}_\phi = -(d\phi)\mathbf{e}_r, \quad d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\phi\mathbf{e}_\phi + dz\mathbf{e}_z$

و $d\mathbf{v} = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$ مولفه‌های $\nabla\mathbf{v}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بدین صورت بیابید:

$$[\nabla\mathbf{v}]_{\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\phi,\mathbf{e}_z} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\phi} - \dfrac{v_\phi}{r} & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial\phi} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

ب ۵۱ - با استفاده از نتیجه مسئله قبل، عبارات زیر را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید:

(الف) $(\nabla\mathbf{v})^S$,

(ب) $\operatorname{div}\mathbf{v}$,

(پ) $\operatorname{curl}\mathbf{v}$.

ب ۵۲ - با استفاده از نتیجه مسئله ب ۵۰ عبارات زیر را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید:

(الف) $\operatorname{div}\mathbf{T}$.

(ب) $\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})$.

فصل ۳

سینماتیک یک محیط پیوسته

شاخه‌ای از مکانیک که در آن مواد به صورت پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرند، به عنوان "مکانیک محیط پیوسته"* شناخته می‌شود. بنابراین در این نظریه، از یک حجم بی‌نهایت کوچک ماده صحبت می‌شود که مجموعه آن "جسم"[2] را تشکیل می‌دهد. همچنین از یک "ذره"[3] در محیط پیوسته می‌توان سخن گفت که در حقیقت به معنای یک حجم بی‌نهایت کوچک از ماده می‌باشد. این فصل، سینماتیک چنین ذراتی را مورد بحث قرار می‌دهد.

۳-۱ - توصیف حرکات یک محیط پیوسته

فرض کنید که جسمی در زمان معین $t=t_o$ یک ناحیه مشخص از فضای فیزیکی را اشغال کند. موقعیت یک ذره در این لحظه می‌تواند توسط بردار موقعیت آن $\mathbf{X}$، که از نقطه‌ای ثابت نظیر O (شکل ۳-۱ راببینید) اندازه گیری می‌شود، توصیف شود. فرض کنید که بردار موقعیت ذره در زمان t ، $\mathbf{x}$ باشد.

---

* فصل اول را برای بحثی پیرامون مدل "محیط پیوسته" نگاه کنید.

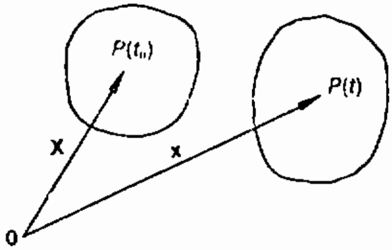
2 - body

3 - particle

پس معادله‌ای به شکل زیر

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \qquad \text{با} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X} \tag{۱-۳}$$

مسیر هر ذره را توصیف می‌کند، که در $t=t_0$ واقع شده است ($\mathbf{X}$ متفاوت برای ذرات متفاوت).



شکل ۳-۱

فرض کنید $\mathbf{X}=X_1\mathbf{e}_1+X_2\mathbf{e}_2+X_3\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ باشند. پس معادله ۳-۱ برحسب مولفه‌هایش چنین شکلی می‌یابد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t), \end{aligned} \tag{۲-۳}$$

یا $x_i=x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ با $X_i=x_i(X_1, X_2, X_3, t_0)$. در معادله ۳-۲ دستگاه سه جزئی (X_1, X_2, X_3) ذرات متفاوت جسم را مشخص و معین کرده و به عنوان مختصات مادی[۴] مشهور است. معادله ۳-۱ یا ۳-۲ حرکت[۵] یک محیط پیوسته را توصیف می‌کند: توجه شود که برای یک ذره مشخص معادله، خط مسیر[۶] ذره تعریف می‌کند.

مثال ۳-۱

حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{X}+ k_2\, t\, X_2\, \mathbf{e}_1$ را در نظر بگیرید، با

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + ktX_2, \\ x_2 &= X_2, \\ x_3 &= X_3, \end{aligned}$$

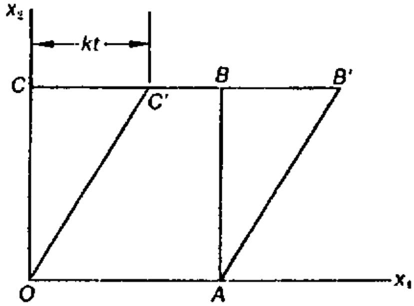
4 - material coordinates

5 - motion

6 - path line

که مختصات مادی (X_1, X_2, X_3) موقعیت ذره‌ای را در $t=0$ می‌دهد. هیات[7] جسم را در زمان t بکشید، باتوجه به این که در $t=0$ شکل جسم یک مکعب با ابعاد واحد (شکل ۳-۲) بوده است.

حـــل: در $t=0$، ذره O در $(0, 0, 0)$ $(X_1, X_2, X_3)_O=(0, 0, 0)$ واقـــع شـــده است. لذا بـــرای ایـــن ذره $(x_1, x_2, x_3)_O=(0, 0, 0)$ برای تمامی t است، یعنی ذره در تمامی مدت در $(0, 0, 0)$ باقی می‌ماند. به طور مشابه $(X_1, X_2, X_3)_A=(1, 0, 0)$ و $(x_1, x_2, x_3)_A=(1, 0, 0)$ بوده، لذا ذره A نیز حرکت نمی‌کند. در حقیقت برای هر ذره روی OA، داریم $(X_1, X_2, X_3)_{OA}=(X_1, 0, 0)$



شکل ۳-۲

و نیز $(x_1, x_2, x_3)_{OA}=(X_1, 0, 0)$. یعنی خط مادی OA یک خط ثابت است.

برای خط مادی CB، $(X_1, X_2, X_3)_{CB}=(X_1, 1, 0)$ و $(x_1, x_2, x_3)_{CB}=(X_1+kt, 1, 0)$، بنابراین هر ذره روی این خط، به طور افقی به طرف راست و به اندازه مسافت kt تغییر مکان می‌دهد.

برای خط مادی OC، $(X_1, X_2, X_3)_{OC}=(0, X_2, 0)$ و $(x_1, x_2, x_3)_{OC}=(ktX_2, X_2, 0)$، لذا هر ذره روی این خط، به صورت افقی به طرف راست و به اندازه مسافتی که به طور خطی با ارتفاع آن متناسب است، حرکت می‌کند، یعنی یک خط راست باقی می‌ماند. موقعیت مشابهی نیز بر خط مادی BA حاکم است.

بنابراین در زمان t، نمای جانبی مکعب، از یک مربع به یک متوازی‌الاضلاع (به صورتی‌که نشان داده شده) تغییر می‌کند. حرکت داده شده در این مثال، به عنوان یک حرکت ساده برشی شناخته می‌شود.

7 - configuration

۳-۲ - توصیف مادی و توصیف فضایی

هنگامی که یک محیط پیوسته در حرکت است، کمیتهای تانسوری که وابسته به ذرات مشخص هستند (درجه حرارت θ، سرعت $\mathbf{v}$ و غیره) با زمان تغییر می‌کنند. ما می‌توانیم این تغییرات را بدینوسیله توصیف کنیم:

۱- با تعقیب کردن ذرات. یعنی θ و v_i را به صورت توابعی از ذرات (که توسط مختصات مادی X_1، X_2، X_3 مشخص شده‌اند) و زمان نشان دهیم. به عبارت دیگر:

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t),$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(X_1, X_2, X_3, t).$$

چنین توصیفی، به عنوان **توصیف مادی**[8] معروف است. نامهای دیگر آن عبارت‌اند از: توصیف لاگرانژی[9] و توصیف مرجع[10].

۲- با مشاهده تغییرات در مکانهای ثابت. یعنی θ، v_i و غیره را به صورت توابعی از موقعیت و زمان ثابت نمایش دهیم. بنابراین:

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t).$$

چنین توصیفی، **توصیف فضایی**[11] یا اولری[12] خوانده می‌شود. دستگاه سه جزئی (x_1, x_2, x_3) موقعیتهای ثابت نقاط را در فضای فیزیکی قرار می‌دهد و به عنوان مختصات فضایی شناخته می‌شود. مختصات فضایی ذرات، x_i، در هر لحظه t توسط معادله ۳-۲ با مختصات مادی، X_i، مرتبط می‌شوند. توجه کنید که در این شیوه، آن چه توصیف می‌شود (یا اندازه‌گیری می‌شود) تغییر کمیتها، در یک مکان ثابت، به صورت تابعی از زمان است. موقعیتهای فضایی، توسط ذرات مختلف، در زمانهای متفاوت اشغال

---

8 - material description

9 - Lagrangian description

10 - reference description

11 - Spatial descrition

12 - Eulerian

می‌شوند. بنابراین، توصیف فضایی اطلاعات مستقیمی در مورد تغییرات خواص ذرات در خلال حرکت به دست نمی‌دهد. البته توصیفهای مادی و فضایی، توسط حرکت به یکدیگر مربوط می‌شوند. یعنی اگر حرکت معلوم باشد، آن گاه یک توصیف را می‌توان از دیگری استخراج نمود. مثال زیر این مسئله را نمایش می‌دهد.

مثال ۳-۲

حرکت جسمی به صورت زیر داده شده است:

$$x_1 = X_1 + ktX_2,$$
$$x_2 = X_2,$$
$$x_3 = X_3.$$

اگر میدان دما برحسب توصیف فضایی زیر داده شده باشد

$$\theta = x_1 + x_2.$$

(الف) توصیف مادی دما را بیابید

(ب) سرعت و نرخ تغییر دما را برای ذرات مادی خاص پیدا کنید. جواب را به هردو توصیف مادی و فضایی نمایش دهید.

حل: (الف) رابطه (I) را در (II) قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\theta = x_1 + x_2 = X_1 + ktX_2 + X_2,$$

یا

$$\theta = X_1 + (kt+1)X_2.$$

(ب) چون یک ذره مادی خاص، به یک X_i مشخص منتسب می‌شود، سرعت آن، با رابطهٔ زیر داده خواهد شد:

$$v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{X_i\text{-fixed}}$$

بنابراین:

$$v_1 = kX_2, \quad v_2 = v_3 = 0.$$

به لحاظ معادلات (I)، توصیف فضایی عبارت است از: $v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0.$

نرخ تغییر دما برای ذرات مادی خاص

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{X_i\text{-fixed}} = kX_2 = kx_2.$$

توجه این که اگرچه دما در توصیف فضایی، مستقل از زمان است ، هر ذره تغییرات دما را تجربه می‌کند، چراکه ذره از یک موقعیت فضایی به موقعیت دیگر جاری می‌شود.

۳-۳ - مشتق مادی

نرخ تغییر کمیتی از یک ذره مادی، نسبت زمان (نظیر دما یا سرعت و غیره) به عنوان مشتق مادی[۱۳] شناخته می‌شود. ما مشتق مادی را با $\frac{D}{Dt}$ نمایش می‌دهیم.

(I) هنگامی که توصیف مادی کمیتی به کار برده می‌شود:

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t),$$

پس:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{X_i\text{-fixed}}.$$

(II) هنگامی که توصیف فضایی کمیتی استفاده می‌شود:

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t),$$

که x_i (به عنوان موقعیتهای کنونی ذرات مادی) به مختصات مادی توسط حرکت معلوم $x_i=x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ مرتبط می‌شوند. پس:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i\text{-fixed}} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{x_i\text{-fixed}}$$

که $\partial x_1/\partial t$ ، $\partial x_2/\partial t$ و $\partial x_3/\partial t$ برای مقادیر ثابت X_i باید به دست آیند. هنگامی که از مختصات مستقیم الخط قائم استفاده می‌شود، $(\partial x_i/\partial t)_{X_i\text{-fixed}}$ مولفه v_1 سرعت یک ذره و غیره را می‌دهد و بنابراین مشتق مادی در مختصات مستقیم الخط عبارت است از:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \qquad \text{(۳-۴ الف)}$$

یا

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta, \qquad \text{(۳-۴ ب)}$$

---

13 - material derivative

باید تاکید نمود که، این معادلات برای θ در یک توصیف فضایی می‌باشند، یعنی $\theta=\theta(x_1,x_2,x_3,t)$. توجه کنید که اگر میدان درجه حرارت مستقل از زمان، و سرعت ذره، بر $\nabla\theta$ عمود باشد (یعنی ذره در امتداد مسیر با θ در حال حرکت باشد) آن گاه همان گونه که انتظار می‌رود $D\theta/Dt=0$ است. قابل توجه این که معادله (۳-۴ الف) تنها برای مختصات مستقیم الخط قائم معتبر است، حال آن که معادله (۳-۴ ب) این مزیت را دارد که برای تمامی دستگاههای مختصات معتبر است. برای یک دستگاه مختصات مشخص، آن چه در حالت کلی مورد نیاز است، عبارت مناسب برای گردایان می‌باشد.*

مثال ۳-۳

با استفاده از معادله ۳-۴، $\dfrac{D\theta}{Dt}$ را برای حرکت و دمای مثال قبل بیابید.

حل: از مثال ۳-۲ داریم:

$$\mathbf{v} = (kx_2)\mathbf{e}_1,$$

و

$$\theta = x_1 + x_2.$$

گرادیان θ عبارت است از $\nabla\theta=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$، بنابراین:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 + (kx_2\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = kx_2.$$

۳-۴ - یافتن شتاب یک ذره از یک میدان سرعت داده شده

شتاب یک ذره، نرخ تغییر سرعت ذره نسبت به زمان می‌باشد. بنابراین، شتاب، مشتق مادی سرعت است. اگر حرکت یک محیط پیوسته، با معادله ۳-۱ بیان شود، یعنی:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \quad \text{با} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X},t_0) = \mathbf{X},$$

آن گاه، سرعت $\mathbf{v}$ یک ذره در لحظه t، به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{v} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}\text{-fixed}} \equiv \frac{D\mathbf{x}}{Dt},$$

و شتاب $\mathbf{a}$ یک ذره در هر لحظه t چنین است:

$$\mathbf{a} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}\text{-fixed}} \equiv \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

---

* به عنوان مثال، مولفه‌های $\nabla\theta$ در مختصات استوانه‌ای در مسئله ب ۴۷ فصل ۲ داده شده است.

بنابراین، اگر توصیف مادی سرعت $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ معلوم باشد (یا از معادله (I) به دست آید) آن‌گاه شتاب، به سادگی با مشتق‌گیری جزئی نسبت به زمان، از تابع $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ محاسبه می‌شود. اگر تنها توصیف فضایی سرعت معلوم باشد [یعنی $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$]، محاسبه شتاب ساده نیست. برای محاسبه آن، فرمول زیر را استخراج می‌کنیم. اگر $\mathbf{V}=v_1(x_1, x_2, x_3, t)\mathbf{e}_1+v_2(x_1, x_2, x_3, t)\mathbf{e}_2+v_3(x_1, x_2, x_3, t)\mathbf{e}_3$ توصیف فضایی سرعت نسبت به مختصات مستقیم الخط قائم (که $\mathbf{e}_i$ ثابت است) باشد، آن‌گاه شتاب با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{a}=\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{Dv_1}{Dt}\mathbf{e}_1+\frac{Dv_2}{Dt}\mathbf{e}_2+\frac{Dv_3}{Dt}\mathbf{e}_3,$$

که:

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_i}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_i}{\partial x_3}. \qquad \text{(۳-۵ الف)}$$

به عبارت دیگر، در مختصات مستقیم الخط قائم، مولفه‌های شتاب بدین صورت معرفی می‌شوند:

$$a_i=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \text{(۳-۵ ب)}$$

یا به شکلی که برای تمامی دستگاههای مختصات معتبر باشد:

$$\mathbf{a}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}. \qquad \text{(۳-۵ پ)}^*$$

به عنوان مثال، مولفه‌های $\mathbf{a}$ در مختصات استوانه‌ای در مسئله ۳ - ۴۶ داده شده است. توجه شود که جمله دوم در این معادله، تنها تانسور $(\nabla\mathbf{v})$ است که روی بردار سرعت $\mathbf{V}$ عمل می‌کند.

مثال ۳-۴

(الف) میدان سرعت مربوط به حرکت یک جسم صلب را که با سرعت زاویه‌ای $\omega=\omega\mathbf{e}_3$ دوران می‌کند، بیابید.

(ب) با استفاده از میدان سرعت بخش (الف) میدان شتاب را محاسبه کنید

حل: (الف) سرعت $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{x}=\omega\mathbf{e}_3\times(x_i\mathbf{e}_i)$ است. با انجام ضرب خارجی به دست می‌آید:

$$v_1=-x_2\omega, \quad v_2=x_1\omega, \quad v_3=0.$$

(ب) در این حالت

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=0$$

* این معادله می‌تواند به صورت $\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla_a)\mathbf{v}$ نوشته شود که $\nabla_a\equiv\mathbf{e}_m(\partial/\partial x_m)$ است. پانوشت صفحه ۵۱ را ببینید.

و

$$[\nabla \mathbf{v}][\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2\omega \\ x_1\omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1\omega^2 \\ -x_2\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$\mathbf{a} = -\omega^2(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$$

همان گونه که انتظار می‌رفت.

مثال ۳-۵

میدان سرعت زیر داده شده است

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{x_3}{1+t},$$

(الف) میدان شتاب را بیابید، (ب) خط مسیر $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ را پیدا کنید

حل: (الف) چون $v_i = \dfrac{x_i}{1+t}, \quad \dfrac{\partial v_i}{\partial t} = \dfrac{-x_i}{(1+t)^2}$

و

$$[(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}] = [\nabla \mathbf{v}][\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{(1+t)^2} \\ \frac{x_2}{(1+t)^2} \\ \frac{x_3}{(1+t)^2} \end{bmatrix}.$$

مولفه‌های شتاب بدین صورت داده می‌شود:

$$a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + ((\nabla \mathbf{v})\mathbf{v})_1 = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0$$

و به طور مشابه:

$$\frac{Dv_2}{Dt} = \frac{Dv_3}{Dt} = 0.$$

هرچند که در یک موقعیت ثابت، سرعت در حال تغییر مشاهده می‌شود، اما سرعت حقیقی یک ذرهٔ به خصوص، ثابت است.

(ب) چون:

$$v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{X_i\text{-fixed}} = \frac{x_1}{1+t},$$

بنابراین:

$$\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^t \frac{dt}{1+t},$$

یعنی:

$$\ln x_1 \Big]_{X_1}^{x} = \ln(1+t)\Big]_0^{t}.$$

بنابراین:

$$x_1 = X_1(1+t).$$

به طور مشابه : $x_3 = X_3(1+t)$ و $x_2 = X_2(1+t)$

۳-۵ - تغییر شکل[16]

جسمی را در نظر بگیریدکه در زمان مرجع t_0دارای هیات خاصی است‌و در زمان t به هیات دیگری تغییر می‌کند. با رجوع به شکل ۳-۳، نقطه مادی P تحت تغییر مکان $\mathbf{u}$ واقع می‌شود به گونه‌ای که در موقعیت زیر قرار می‌گیرد:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \tag{۳-۶}$$

نقطه مجاور Q در $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ به $\mathbf{X}+d\mathbf{X}=\mathbf{X}+d\mathbf{X}+\mathbf{u}(\mathbf{X}+d\mathbf{X}, t)$ تغییر مکان می‌دهد. داریم:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}+d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t).$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت (معادله ب ۴۸ را ببیند):

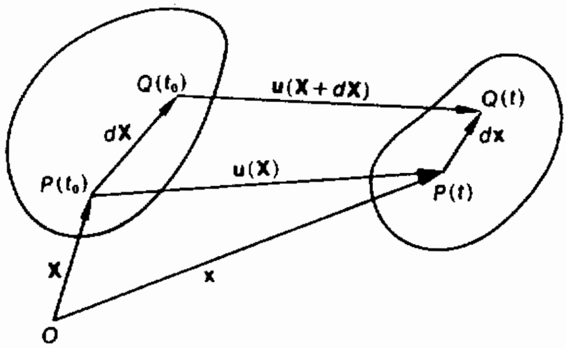
$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}, \tag{۳-۷}$$

که $\nabla\mathbf{u}$ یک تانسور درجه دو بوده، به عنوان گرادیان تغییر مکان[17] (نسبت به $\mathbf{X}$) شناخته می‌شود. ماتریس $\nabla\mathbf{u}$ نسبت به مختصات مستقیم الخط قائم (با $\mathbf{X}=X_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i$) عبارت است از:

$$[\nabla\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \tag{۳-۸}$$

16- Deformation

17 - displacxement gradient



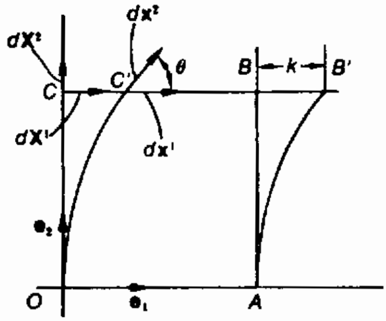
شکل ۳-۳

مثال ۳-٦

مولفه‌های تغییر مکان زیر داده شده است:

$$u_1 = kX_2^2, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

(الف) شکل تغییر یافته مربع واحد $OABC$ در نمودار ۳-۴ رسم کنید.



شکل ۳-۴

(ب) بردار تغییر شکل یافته (یعنی $d\mathbf{x}^1$ و $d\mathbf{x}^2$) اجزای مادی $d\mathbf{x}^1=dx_1\mathbf{e}_1$ و $d\mathbf{x}^2=dx_2\mathbf{e}_2$ را (که در نقطه C قرار داشتند) بیابید.

(ج) نسبت طولهای تغییر یافته، به طولهای تغییر نیافتهٔ دیفرانسیل المانها را (که به عنوان کشش [18] شناخته می‌شود) از

18 - Stretch

بند (ب) بیابید و تغییر در زاویه بین دو المان را پیدا کنید.

حل: (الف) برای خط مادی OA، $X_2=0$ است، بنابراین $u_1=u_2=u_3=0$. یعنی خط، تغییر مکانی نداده است. برای خط مادی CB، $X_2=1$، $u_1=k$، لذا خط، به اندازه k واحد به طرف راست تغییر مکان می‌دهد. برای خطوط مادی OC و AB، X_2^2، $u_1=k$، پس خطوط، به شکل سهمی[19] در می‌آیند. بنابراین، شکل تغییر یافته، با $OAB'C'$ در شکل ۳-۴ داده شده است.

(ب) برای نقطه مادی C، ماتریس گرادیان تغییر مکان عبارت است از

$$[\nabla \mathbf{u}]_{\text{at } C} = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_2=1} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین:

$$d\mathbf{x}^1 = d\mathbf{X}^1 + (\nabla \mathbf{u})\, d\mathbf{X}^1 = dX_1\mathbf{e}_1 + 0 = dX_1\mathbf{e}_1,$$
$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^2 + (\nabla \mathbf{u})\, d\mathbf{X}^2 = dX_2\mathbf{e}_2 + 2k\,dX_2\mathbf{e}_1.$$

(ج) از نتایج بخش (ب) داریم:

$$\frac{|d\mathbf{x}^1|}{|d\mathbf{X}^1|} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{|d\mathbf{x}^2|}{|d\mathbf{X}^2|} = (1+4k^2)^{1/2}$$

و

$$\cos\theta = \frac{d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2}{|d\mathbf{x}^1|\,|d\mathbf{x}^2|} = \frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}.$$

اگر γ بیانگر تقلیل یا کاهش در زاویه باشد، آن‌گاه:

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma = \frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}.$$

یعنی:

$$\gamma = \sin^{-1}\frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}.$$

از معادله ۳-۷ مشاهده می‌شود که اگر $\nabla\mathbf{u}=0$ باشد، آن‌گاه $d\mathbf{x}=d\mathbf{X}$ بوده، حرکت نقطهٔ مجاور p (در شکل ۳-۳) انتقال جسم صلب خواهد بود. تغییر شکل هرچه باشد، به هرحال در تبدیل $\nabla\mathbf{u}$ مستتر است.

اینک دو بردار مادی $d\mathbf{X}'$ و $d\mathbf{X}^2$ را در نظر بگیرید که از نقطه p (در شکل ۳-۳) آغاز می‌شوند.

---

19 - parabolic

در اثر حرکت، $d\mathbf{X}^1$ به $d\mathbf{x}^1$ و $d\mathbf{X}^2$ به $d\mathbf{x}^2$ تبدیل می‌شود، به طوری که :

$$d\mathbf{x}^1 = d\mathbf{X}^1 + (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}^1,$$

$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^2 + (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}^2.$$

اندازه و مقیاس تغییر شکل، توسط حاصل ضرب داخلی $d\mathbf{x}^2$ و $d\mathbf{x}^1$ داده می‌شود:

$$d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 + d\mathbf{X}^1 \cdot (\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X}^2 + d\mathbf{X}^2 \cdot (\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X}^1$$
$$+\{(\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}^1\} \cdot \{(\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}^2\}.$$

طبق تعریف برگردان:

$$d\mathbf{X}^2 \cdot (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}^1 = d\mathbf{X}^1 \cdot (\nabla\mathbf{u})^T d\mathbf{X}^2$$

و

$$\{(\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X}^1\} \cdot \{(\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X}^2\} = d\mathbf{X}^1 \cdot (\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X}^2,$$

بنابراین:

$$d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 + d\mathbf{X}^1 \cdot \{(\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})\}d\mathbf{X}^2.$$

فرض کنید:

$$\mathbf{E}^* = \tfrac{1}{2}\{(\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})\}, \qquad (۹-۳)$$

پس:

$$d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 + 2d\mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{E}^* d\mathbf{X}^2. \qquad (۱۰-۳)$$

از معادله (۳ - ۱۰) مشهود است که اگر $\mathbf{E}^*=0$ باشد، آن گاه $dx^1.dx^2=dx^1.dx^2$ است، لذا طول و زاویه بین المانهای خطی مادی، بدون تغییر باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، تانسور مرتبه دو $\mathbf{E}^*$ تغییر شکلهای "نقاط مجاور" ذره p را مشخص می‌کند و به عنوان *تانسور کرنش لاگرانژی*[۲۰] (محدود) شناخته می‌شود. مولفه‌های $\mathbf{E}^*$ نسبت به مختصات مستقیم الخط قائم عبارت اند از:

$$\mathbf{E}^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right). \qquad (۱۱-۳)$$

20 - Lagrangian strain tensor

در بسیاری از مسائل کاربردی، تغییر شکلهای یک جسم، به گونه‌ای است که مقادیر مولفه‌های گرادیان تغییر مکان، بسیار کوچکتر از واحد است (اغلب از مرتبه 10^{-4}) لذا می‌توان مولفه‌های حاصل ضرب در معادله E^* [یعنی $(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})$] صرف نظر کرد. در این حالت، از معادله (۳ - ۹) داریم:

$$\mathbf{E}^* \approx \tfrac{1}{2}\{(\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T\} = (\nabla\mathbf{u})^S.$$

پس برای تغییر شکل کوچک داریم:

$$d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 + 2d\mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{E}d\mathbf{X}^2. \qquad (۱۲-۳)$$

که

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\{(\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T\}. \qquad (۱۳-۳ \text{ الف})$$

اگر $(\nabla\mathbf{u})$ پاد متقارن باشد، آن‌گاه $\mathbf{E}=0$ و $d\mathbf{x}^1 . d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{X}^1 . d\mathbf{X}^2$، بنابراین، تانسور گرادیان تغییر مکان بی‌نهایت کوچک، یک چرخش بی‌نهایت کوچک جسم صلب - از همسایگی ذره p - را مشخص می‌کند. تانسور $\Omega = \frac{1}{2}\{(\nabla\mathbf{u}) - (\nabla\mathbf{u})^T\}$، تانسور چرخش (بی‌نهایت کوچک) نامیده می‌شود. بردار دوگان[21] این تانسور پاد متقارن، عملا محور و زاویه این چرخش را تعریف می‌کند (مثال ۲ - ۱۲ را ببینید). تانسور $\mathbf{E}$، تانسور کرنش[22] خوانده می‌شود. مولفه‌های $\mathbf{E}$، برحسب مختصات مستقیم الخط دکارتی، با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \qquad (۱۳-۳ \text{ ب})$$

یا

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۳ \text{ پ})$$

21 - dual vector

22 - strain tensor

مولفه‌های کرنش بی‌نهایت کوچک، یک تفسیر سادهٔ هندسی دارند:

برای تفسیر عناصر قطری، المان مادی منفرد $d\mathbf{X}^1=d\mathbf{X}^2=(dS)\mathbf{n}$ را در نظر بگیرید که $\mathbf{n}$ یک بردار یکهٔ دلخواه بوده، dS طول $d\mathbf{X}^1$ باشد. اگر ds طول تغییر شکل یافته $d\mathbf{X}^1$ باشد، یعنی $ds=|d\mathbf{x}^1|$، از معادله (۳-۱۲) داریم:

$$(ds)^2-(dS)^2=2(dS)^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\mathbf{n}.$$

حال برای تغییر شکل‌کوچک*: $(ds)^2-(dS)^2=(ds+dS)(ds-dS)\approx 2dS(ds-dS)$

بنابراین:

$$\frac{ds-dS}{dS}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\mathbf{n}=E_{(n)(n)} \quad \text{(روی } n \text{ جمع بسته نمی‌شود)} \qquad (۳-۱۴)$$

به عبارت دیگر تغییر طول بر واحد طول (که به عنوان افزایش طول واحد[۲۴] یاکرنش عمودی[۲۵] خوانده می‌شود) از هر المان مادی که از نقطه p شروع می‌شود، به سادگی از تانسور کرنش $\mathbf{E}$ محاسبه می‌شود. به عنوان مثال، اگر $\mathbf{n}=\mathbf{e}_1$ باشد، آن‌گاه، از معادله (۳-۱۴) داریم:

$$E_{11}=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{E}\mathbf{e}_1$$

که کشیدگی واحد برای المانی است که ابتدا در جهت x_1 قرار داشت.

به طور مشابه، E_{22} و E_{33} کشیدگیهای واحد را به ترتیب در جهت‌های x_2 و x_3 می‌دهند.

برای تفسیر عناصر غیر قطری ماتریس کرنش، فرض کنید $d\mathbf{X}^1=(dS_1)\mathbf{m}$، $d\mathbf{X}^2=(dS_2)\mathbf{n}$ و بردارهای یکهٔ $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ عمود بر یکدیگر باشند. پس، از معادلهٔ (۳-۱۲) خواهیم داشت:

$$(ds_1)(ds_2)\cos\theta=2(dS_1)(dS_2)\mathbf{m}\cdot\mathbf{E}\mathbf{n},$$

که θ زاویه بین $d\mathbf{x}'$ و $d\mathbf{x}^2$ است. اگر $\theta=(\pi/2)-\gamma$ باشد، آن‌گاه γ کاهش کوچک زاویه بین $d\mathbf{X}'$ و $d\mathbf{X}^2$ (که به کرنش برشی[۲۶] مشهور است) را اندازه خواهد گرفت. چون:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma$$

* به عنوان مثال $(1.0001+1)(1.0001-1)\approx(2)(0.0001)$

24 - unit elongation

25 - normal strain

26 shear strain

و برای کرنش کوچک $sin\gamma \approx \gamma$ ، $ds_2/dS_2 \approx 1$ ، $dS_1/dS_1 \approx 1$، پس:

$$\gamma = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}. \qquad (۱۵-۳)$$

به ازای انتخاب خاصِ $\mathbf{m}=\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{n}=\mathbf{e}_2$، $2E_{12}$ تقلیل زاویه بین دو المانی را به دست می‌دهد که ابتدا در جهت x_1 و x_2 قرار داشته‌اند. به طور مشابه، $2E_{13}$ تقلیل زاویه بین المانهای در جهت x_1 و x_3 خواهد بود، و به همین ترتیب.

مثال ۳-۷

مولفه‌های تغییر مکان داده شده است:

$$u_1 = kX_2^2, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad k = 10^{-4},$$

(الف) تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک $\mathbf{E}$ را به دست آورید.

(ب) با استفاده از تانسور کرنش $\mathbf{E}$، کشیدگی واحد، برای المانهای مادی $d\mathbf{X}'=dX_1\mathbf{e}_1$، $d\mathbf{X}^2=dX_2\mathbf{e}_2$ را که در نقطه $C(۰،۱،۰)$ بودند، بیابید (شکل ۳-۴ را ببینید).

همچنین، کاهش در زاویه بین این دو المان را به دست آورید.

(پ) نتایج را با نتایج مثال ۳-۶ مقایسه کنید.

حل: (الف) داریم:

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$[\mathbf{E}] = [\nabla \mathbf{u}]^S = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) در نقطه C، $X_2=1$، بنابراین :

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای المان $d\mathbf{X}'=dX_1\mathbf{e}_1$، کشیدگی واحد E_{11} است، که صفر می‌باشد. برای المان $d\mathbf{X}^2=dX_2\mathbf{e}_2$ کشیدگی واحد E_{22} است که صفر می‌باشد. تقلیل در زاویه بین دو المان، با $2E_{12}$ داده می‌شود، یعنی: $2k = 2 \times 10^{-4}$

(پ) از نتایج مثال ۳-۶ داریم:

$$\frac{|d\mathbf{x}^1| - |d\mathbf{X}^1|}{|d\mathbf{X}^1|} = 0, \quad \frac{|d\mathbf{x}^2| - |d\mathbf{X}^2|}{|d\mathbf{X}^2|} = (1 + 4k^2)^{1/2} - 1$$

و

$$\sin\gamma = \frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}.$$

حال با $k=10^{-4}$، داریم:

$$(1+4k^2)^{1/2}-1 \approx 1+2k^2-1 = 2k^2 = 2\times10^{-8}$$

و $\sin\gamma\approx2k=2\times10^{-4}$ لذا $\gamma\approx=2\times10^{-4}$. چون 10^{-8} در مقایسه با 10^{-4} قابل صرف نظر کردن است، مشاهده می‌شود که نتایج مثال ۳-۶ برای مقادیر کوچک k، به نتایج این مثال منجر می‌شود.

مثال ۳-۸

میدان تغییر مکان زیر داده شده است:

$$u_1 = k(2X_1+X_2^2),\quad u_2 = k(X_1^2-X_2^2),\quad u_3 = 0,$$

که در آن، $k=10^{-4}$ است.

(الف) افزایش طول واحد و تغییر زاویه برای دو المان مادی $d\mathbf{X}'=dX_1\mathbf{e}_1$ و $d\mathbf{X}^2=dX_2\mathbf{e}_2$ که از یک ذره‌ای با مشخصهٔ $\mathbf{X}=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$ صادر شده‌اند، را بیابید.

(ب) موقعیت تغییر شکل یافته این دو المان $d\mathbf{X}'$ و $d\mathbf{X}^2$ را پیدا کنید.

حل: (الف) $[\nabla\mathbf{u}]$ را در $X_1=1$، $X_2=-1$، $X_3=0$ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$[\nabla\mathbf{u}] = k\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

بنابراین، ماتریس کرنش عبارت است از:

$$[\mathbf{E}] = k\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

چون $E_{11}=E_{22}=2k$، هردو المان، دارای کشیدگی واحد 2×10^{-4} می‌باشند. بعلاوه، چون $E_{12}=0$، این خطوط عمود بر یکدیگر باقی می‌مانند.

(ب) از

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u})\,d\mathbf{X},$$

داریم

$$[d\mathbf{x}'] = [d\mathbf{X}'] + [\nabla\mathbf{u}]\,[d\mathbf{X}'] = \begin{bmatrix}dX_1\\0\\0\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dX_1\\0\\0\end{bmatrix} = dX_1\begin{bmatrix}1+2k\\2k\\0\end{bmatrix}$$

و به طور مشابه:

$$[d\mathbf{x}^2] = dX_2 \begin{bmatrix} -2k \\ 1+2k \\ 0 \end{bmatrix}$$

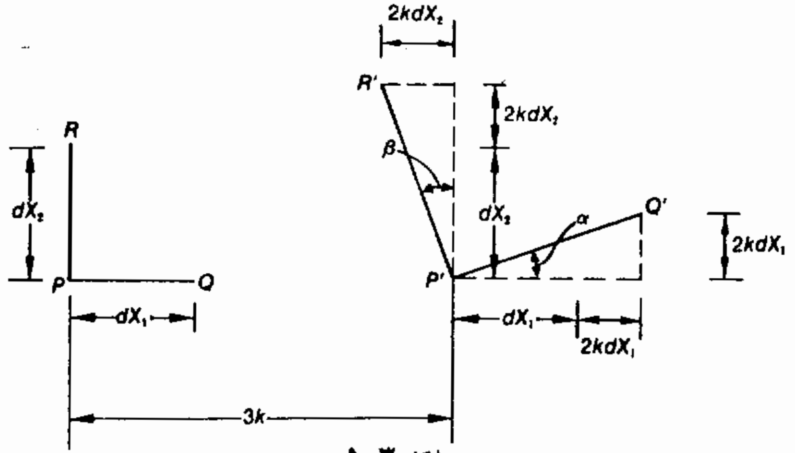
موقعیت تغییر شکل یافتهٔ این المانها، در شکل ۳-۵ رسم شده است. توجه به نمودار نشان می‌دهد که

$$\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{2kdX_1}{dX_1} = 2k$$

و

$$\beta \approx \tan\beta \approx \frac{2kdX_2}{dX_2} = 2k.$$

بنابراین، همانگونه که قبلا به دست آمد، زاویه بین $d\mathbf{X}'$ و $d\mathbf{X}^2$ تغییری نکرد.



شکل ۳-۵

مثال ۳-۹

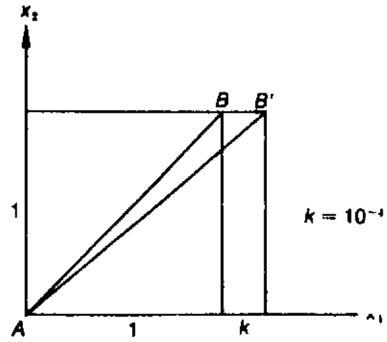
برای یک مکعب واحد، که لبه‌های آن موازی محورهای مختصات است، میدان تغییر مکان زیر داده شده :

$$u_1 = kX_1, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad k = 10^{-4}.$$

افزایش طول قطر AB (شکل ۳-۶ را ببینید) را (الف) با استفاده از تانسور کرنش، و (ب) با استفاده از هندسه بیابید.

حل: (الف) تانسور کرنش، به سادگی به دست می آید:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



شکل ۳-۶

چون قطر AB نخست در جهت $\mathbf{n}=\sqrt{2}.2(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ بود، کشیدگی واحد آن، با رابطه زیر داده می‌شود:[1]

$$E_{(n)(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} = [\sqrt{2/2}, \sqrt{2/2}, 0]\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2}.$$ (روی n جمع بسته نمی‌شود)

چون $AB=\sqrt{2}$،

$$\Delta AB = \left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{2}.$$

(ب) به صورت هندسی:

$$AB' - AB = \{1 + (1+k)^2\}^{1/2} - \sqrt{2}$$

یا

$$\Delta AB = \sqrt{2}\left[(1 + k + k^2/2)^{1/2} - 1\right].$$

برای بهره‌گیری از کوچک بودن k ، نخستین مولفه را بسط می‌دهیم:

$$\left(1 + k + \frac{k^2}{2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(k + \frac{k^2}{2}\right) + \cdots \approx 1 + \frac{k}{2}.$$

بنابراین، در توافق با بخش (الف)

$$\Delta AB = \sqrt{2}\left(\frac{k}{2}\right).$$

۳-۶-کرنش اصلی

چون تانسور کرنش $\mathbf{E}$ متقارن است، حداقل سه جهت به دو عمود بر هم $\mathbf{n}_1$، $\mathbf{n}_2$ و $\mathbf{n}_3$ وجود دارد

(بخش ۲ ب ۱۳ را نگاه کنید) که نسبت به آنها ماتریس $\mathbf{E}$ قطری است. یعنی:

$$[\mathbf{E}]_{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}.$$

تفسیر هندسی آن این است که خطوط المانهای بی‌نهایت کوچک در جهت $\mathbf{n}_1$، $\mathbf{n}_2$ و $\mathbf{n}_3$، بعد از تغییر شکل، عمود بر یکدیگر باقی می‌مانند. این جهات، به عنوان جهات اصلی کرنش مشهورند. کشیدگی واحد، در امتداد جهت اصلی (یعنی E_1، E_2 و E_3) مقادیر ویژه یا کرنشهای اصلی تانسور $\mathbf{E}$ هستند. این مقادیر، شامل حداکثر و حداقل کرنشهای عمودی میان تمامی جهات صادره از ذره می‌باشند. برای یک $\mathbf{E}$ داده شده، کرنشهای اصلی، از معادله مشخصه $\mathbf{E}$ به دست می‌آیند:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{۱۶-۳}$$

که در آن داریم:

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}, \tag{۱۷-۳}$$

و

$$I_3 = |E_{ij}|.$$

I_1، I_2، I_3 پایاهای عددی تانسور کرنش خوانده می‌شوند.

۳-۷ - اتساع[۲۷]

نخستین پایای عددی تانسور کرنش، دارای یک معنی هندسی ساده است. برای یک تغییر شکل خاص، سه خط مادی را در نظر بگیرید که از نقطه منفرد p صادر شده و در امتداد جهات اصلی قرار دارند. این خطوط، یک مکعب مستطیل را تعریف می‌کنند که وجوه آن از اندازه اولیه dS_1، dS_2، dS_3 به $dS_1(1+E_1)$، $dS_2(1+E_2)$، $dS_3(1+E_3)$، افزایش می‌یابد (E_1، E_2، E_3 کرنشهای اصلی می‌باشند).

---

27 - dilatation

بنابر این تغییر $\Delta(dV)$ در حجم مادی dV عبارت است از:

$$\Delta(dV) = (dS_1)(dS_2)(dS_3)(1+E_1)(1+E_2)(1+E_3) - (dS_1)(dS_2)(dS_3)$$
$$= (dV)(E_1+E_2+E_3)$$

به علاوهٔ مولفه‌های مرتبه بالاتر از E_iها. بنابراین برای تغیر شکل کوچک

$$e \equiv \frac{\Delta(dV)}{dV} = E_1+E_2+E_3 = E_{11}+E_{22}+E_{33} = E_{ii}. \qquad (۱۸-۳)$$

این تغییر حجم واحد، به عنوان اتساع شناخته می‌شود. توجه کنید که

$$E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

۳-۸ - نرخ تغییر شکل[۲۸]

المان مادی $d\mathbf{x}$ صادره از نقطه مادی P (که در موقعیت $\mathbf{x}$ در زمان t واقع شده است) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $(D/Dt)d\mathbf{x}$، نرخ تغییر طول و جهت المان مادی $d\mathbf{x}$ را محاسبه کنیم. از $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ داریم.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \mathbf{x}(\mathbf{X},t).$$

بنابراین:

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) - \mathbf{v}(\mathbf{X},t) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v})d\mathbf{X}, \qquad (۱۹-۳)$$

که $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}$ گرادیان $\mathbf{v}$ نسبت به مختصات مادی $\mathbf{X}$ می‌باشد.

معادله (۳-۱۹) $(D/Dt)d\mathbf{x}$ را در یک توصیف مادی نشان می‌دهد، برای به دست آوردن $(\frac{D}{Dt})\dot{d}\mathbf{x}$ در توصیف فضایی، توجه شود که چون $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ سرعت نقطه مادی P نسبت به موقعیت کنونی $\mathbf{x}$ است، اگر توصیف فضایی از $\mathbf{V}$ به کار گرفته شود، این سرعت با $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ بیان خواهد شد. [توجه شود که $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ و $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ توابع متفاوت می‌باشند].

بنابر این:

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t) - \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})d\mathbf{x}, \qquad (۲۰-۳)^*$$

که $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ گرادیان فضایی سرعت می‌باشد. برای آن چه در پیش است، فقط توصیف فضایی به کار برده

28 - rate of deformation

* یا $(\nabla_X v)\,dX = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j e_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_j e_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} dx_m e_i = (\nabla_x v)dx$

خواهد شد، نماد $(\nabla \mathbf{v})$ به معنای $(\nabla_x \mathbf{v})$ می‌باشد. برحسب مولفه‌های $(\nabla \mathbf{v})$ مختصات مستقیم الخط قائم، به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \qquad (۲۱-۳)$$

اگر $\nabla \mathbf{v}$ پاد متقارن باشد، از بخش ۲ ب ۱۱ می‌دانیم که یک بردار ω وجود دارد، به گونه‌ای که:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \mathbf{v})\, d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}.$$

بنابراین، یک گرادیان سرعت پاد متقارن، سرعت زاویه‌ای ω (چرخش جسم صلب موضعی) را نمایش می‌دهد.

در حالت کلی، $\nabla \mathbf{v}$ ، به مجموع عناصر متقارن و پاد متقارن تجزیه می‌شود.

پس

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \qquad (۲۲-۳)$$

که

$$\mathbf{D} = \frac{(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} \qquad \text{(بخش متقارن)} \qquad (۲۳-۳)$$

قسمت متقارن به عنوان تانسور نرخ تغییر شکل[۳۰] شناخته می‌شود و

$$\mathbf{W} = \frac{(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T}{2} \qquad \text{(بخش پاد متقارن)} \qquad (۲۴-۳)$$

قسمت پادمتقارن به عنوان تانسور چرخش[۳۱] شناخته می‌شود. بردار دوگان آن ω سرعت زاویه‌ای آن قسمت از حرکت می‌باشد، که نمایشگر دوران جسم صلب‌است* . تفسیر دیگر ω در بخش ۳-۱۳ ارائه می‌شود.

30 - rate of deformation tensor

31 - Spin tensor

* تانسور $2W$ و بردار $2\omega = Curl V$ توسط هیدرودینامیستها به ترتیب تانسور چرخش Vorticity tensor و بردار چرخش Vorticity Vector خوانده می‌شود.

برحسب مختصات دکارتی، مولفه‌های $\mathbf{D}$ و $\mathbf{W}$ عبارت‌اند از:

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \qquad (۲۵-۳)$$

$$[\mathbf{W}]=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۲۶-۳)$$

اینک، یک تفسیر هندسی از عناصر قطری $\mathbf{D}$ به دست می‌دهیم. فرض کنید $d\mathbf{x}=(ds)\mathbf{n}$ باشد که $\mathbf{n}$ برداری یکه در جهت $d\mathbf{x}$ باشد. پس $d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=(ds)^2.$

بنابراین:

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})=\frac{D}{Dt}(ds)^2,$$

یعنی:

$$2d\mathbf{x}\cdot\frac{D(d\mathbf{x})}{Dt}=2ds\,\frac{D(ds)}{Dt}.$$

اما:

$$\frac{D(d\mathbf{x})}{Dt}=(\nabla\mathbf{v})\,d\mathbf{x}.$$

(معادله ۳ـ ۲۰ را ببینید)

بنابراین:

$$d\mathbf{x}\cdot(\nabla\mathbf{v})\,d\mathbf{x}=ds\,\frac{D(ds)}{Dt}$$

یا:

$$(ds)^2\mathbf{n}\cdot(\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}=(ds)\,\frac{D(ds)}{Dt}.$$

یعنی:

$$\frac{1}{ds}\,\frac{D(ds)}{Dt}=\mathbf{n}\cdot(\nabla\mathbf{v})\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}\mathbf{n}.$$

چون:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{W}^T\mathbf{n} \qquad \text{(تعریف برگردان)}$$

$$= -\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}\mathbf{n} \qquad \text{(} \mathbf{W} \text{ پادمتقارن است)}$$

بنابراین $\mathbf{n}.\mathbf{W}\mathbf{n}=0$ و

$$\frac{1}{ds}\frac{D(ds)}{Dt} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n} = D_{(n\times n)}. \quad \text{(نه جمع روی } n\text{)} \qquad (۲۷-۳)$$

به عبارت دیگر، $D_{(n)(n)}$ نرخ تغییر طول بر واحد طول را می‌دهد که به عنوان کشیدگی[۳۳] یا نرخ کشش[۳۴] برای یک المان مادی در جهت $\mathbf{n}$، شناخته می‌شود. D_{11} کشیدگی برای یک المان مادی واقع در جهت x_1 را ارائه می‌کند، تفسیر مشابهی برای D_{22} و D_{33} می‌توان داشت. اگر واقعاً توجه شود که $\mathbf{V}dt$ تغییر مکان بی‌نهایت کوچک را (که توسط یک ذره در خلال بازه زمانی dt انجام شده) به دست دهد، تفسیر را عملا می‌توان از آنچه برای مولفه‌های کرنش داده شد، استنتاج نمود. بنابراین، به وضوح نتایج زیر را خواهیم داشت:

$2D_{12}$ نرخ کاهش زاویه (از $\pi/2$) دو المان در جهت $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را می‌دهد که به عنوان برش[۳۵] یا نرخ برش[۳۶] شناخته می‌شود و به همین‌ترتیب.* همچنین، نخستین پایای تانسور نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$، نرخ تغییر حجم بر واحد حجم را می‌دهد، یعنی، اگر حجم بی‌نهایت کوچک یک ذره با dV مشخص شود، داریم:

$$\Delta \equiv \frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} = D_{11}+D_{22}+D_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \qquad (۲۸-۳)$$

چون $\mathbf{D}$ متقارن است، نتیجه می‌گیریم که همواره سه جهت دو به دو عمود بر هم نیز وجود دارند (بردارهای ویژه $\mathbf{D}$) که در امتداد آنها، کشیدگی (مقادیر ویژه $\mathbf{D}$) شامل مقدار حداکثر و حداقل تمامی المانهای بی‌نهایت کوچکی است که از نقطه p می‌گذرند.

33 - Stretching

34 - rate of extension

35 - Shearing

36 - rate of shear

* مسئله ۳۳-۳ را ببینید.

مثال ۳-۱۰

میدان سرعت زیر داده شده است (مثال ۳-۲ را نیز ببینید)

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0,$$

(الف) تانسورهای نرخ تغییر شکل و چرخش را بیابید.

(ب) نرخ کشیدگی المانهای مادی زیر را محاسبه کنید

$$d\mathbf{x}^1 = (ds_1)\mathbf{e}_1, \quad d\mathbf{x}^2 = (ds_2)\mathbf{e}_2, \quad \text{و} \quad d\mathbf{x} = dl(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2);$$

(ج) حداقل و حداکثر نرخ کشیدگی را پیدا کنید.

حل: (الف) ماتریس گرادیان بردار عبارت است از:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

به طوری که

$$[\mathbf{D}] = [\nabla \mathbf{v}]^S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$[\mathbf{W}] = [\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب) المان مادی $d\mathbf{x}^1$ هم اکنون در جهت $\mathbf{e}_1$ می‌باشد و لذا نرخ تغییر شکل آن برابر است با $D_{11}=0$. به طور مشابه، نرخ تغییر شکل $d\mathbf{x}^2$ برابر $D_{22}=0$ می‌باشد. برای المان $d\mathbf{x}=(ds)\mathbf{n}$ که $\mathbf{n}=(1/\sqrt{5})(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)$ و $ds=\sqrt{5}dl$ است، داریم:

$$\frac{\frac{D}{Dt}(ds)}{ds} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n} = \frac{1}{5}[1, 2, 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}k.$$

(پ) ما از معادله مشخصه $|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda(\lambda^2 - k^2/4) = 0,$

مقادیر ویژه تانسور $\mathbf{D}$ را به صورت $\pm k/2$ و $\lambda=0$ محاسبه می‌کنیم. بنابراین $k/2$ حداکثر و $-k/2$ حداقل نرخ

کشیدگی است. بردارهای ویژه $\mathbf{n}_1=(\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ و $\mathbf{n}_2=(\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$ جهات المانهایی را می‌دهد که به ترتیب واجد حداکثر و حداقل کشیدگی می‌باشند.

۳-۹ - معادله بقای جرم

اگر یک ذره*[۳۸] را در خلال حرکتش تعقیب کنیم، ممکن است حجم آن تغییر کند، اما مجموع جرم آن بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر ρ و dv به ترتیب چگالی[۴۰] و حجم یک ذره باشد، داریم:

$$\frac{D}{Dt}(\rho dV)=0,$$

یعنی:

$$\rho\frac{D(dV)}{Dt}+dV\frac{D\rho}{Dt}=0.$$

با استفاده از معادله (۳-۲۸)، به دست می‌آوریم:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\frac{D\rho}{Dt}=0. \qquad \text{(۳-۲۹ الف)}$$

یا به شکل پایا:

$$\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\frac{D\rho}{Dt}=0, \qquad \text{(۳-۲۹ ب)}$$

که در توصیف فضایی:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\rho.$$

معادله (۳-۲۹)، معادله بقای جرم[۴۱] بوده، به عنوان معادله پیوستگی[۴۲] شناخته می‌شود.

یک حالت خاص و مهم معادله (۳-۲۹) مربوط به یک ماده تراکم ناپذیر[۴۳] می‌باشد. طبق تعریف، مشتق مادی چگالی، صفر است و معادله بقای جرم به صورت $\partial v_i/\partial x_i=0$ در می‌آید.

---

38 - Particle

* در این جا ذره به معنای حجمی از ماده (همان گونه که قبلا اشاره شد) می‌باشد.

40 - density

41 - equation of conservation of mass

42 - equation of continuity

43 - incompressible

مثال ۳-۱۱

برای میدان سرعت مثال ۳-۵، $v_i=x_i/(1+t)$ می‌باشد. چگالی یک ذره مادی را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

حل: از معادله بقای جرم داریم:

$$\frac{D\rho}{Dt}=-\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=-\rho\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\right]=-\frac{3\rho}{1+t}.$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\ln\rho=\int\frac{D\rho}{\rho}=-3\int\frac{Dt}{1+t}=-3\ln(1+t)+A.$$

که در آن، A ثابت انتگرال‌گیری می‌باشد.

اگر در زمان $t=t_\circ$، $\rho=\rho_\circ$ باشد، آن‌گاه $A=Ln\rho_\circ$، بنابراین $\rho=\dfrac{\rho_\circ}{(1+t)^3}$

۳-۱۰ - شرایط سازگاری برای مولفه‌های کرنش بی‌نهایت کوچک

اگر سه تابع تغییر مکان u_1، u_2، u_3، داده شده باشند، همواره می‌توان شش مولفه کرنش را در هر ناحیه‌ای که مشتقات جزئی $\partial u_i/\partial x_i$ وجود داشته باشند، محاسبه نمود. از سوی دیگر، اگر شش مولفه کرنش E_{ij} در ناحیه‌ای به طور دلخواه ارائه شود، به طور کلی، هیچ میدان تغییر مکان u_i وجود ندارد که معادلات زیر را راضا نماید:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)=E_{ij}. \qquad (۳-۳۰)$$

به عنوان مثال اگر:

$$E_{11}=X_2{}^2,\quad E_{22}=E_{33}=E_{12}=E_{13}=E_{23}=0. \qquad (۳-۳۱)$$

باشند، آن‌گاه از $E_{11}=\partial u_1/\partial x_1=X_2{}^2$ و $E_{22}=\partial u_2/\partial x_2=0$، با انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$u_1=X_1X_2{}^2+f(X_2,X_3), \qquad (۳-۳۲)$$

$$u_2=g(X_1,X_3), \qquad (۳-۳۳)$$

که f و g توابع اختیاری انتگرال‌گیری می‌باشند.

حال چون $E_{12}=0$ است، باید داشته باشیم

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}=0. \qquad (۳-۳۴)$$

با استفاده از معادلات (۳-۳۲) و (۳-۳۳) داریم:

$$2X_1X_2+\frac{\partial f(X_2,X_3)}{\partial X_2}+\frac{\partial g(X_1,X_3)}{\partial X_1}=0. \qquad (۳-۳۵)$$

چون جمله دوم و سوم نمی‌تواند دارای جملاتی به شکل X_1X_2 باشد، معادله فوق، هرگز نمی‌تواند ارضا شود. به عبارت دیگر، میدان تغییر مکان متناظر و در ارتباط با E_{ij} داده شده وجود ندارد. مبتنی بر اصطلاحات نظریه الاستیسیته، می‌گوییم که E_{ij}های داده شده سازگار[۴۴] نیستند.

اینک قضیه زیر را بیان می‌کنیم: اگر $E_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ توابع پیوسته بوده، دارای مشتقات جزئی مرتبه دو پیوسته در یک ناحیه مرتبط ساده[۴۵]* باشند، آن‌گاه شرایط لازم و کافی برای وجود حلهای پیوسته منحصر به فرد[۴۷] $u_i(X_1, X_2, X_3)$ از معادله (۳-۳۰)، عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^{\,2}}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^{\,2}}=2\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1\partial X_2}, \qquad (۳-۳۶\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3^{\,2}}+\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_2^{\,2}}=2\frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2\partial X_3}, \qquad (۳-۳۶\text{ب})$$

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_3^{\,2}}=2\frac{\partial^2 E_{31}}{\partial X_3\partial X_1}, \qquad (۳-۳۶\text{پ})$$

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2\partial X_3}=\frac{\partial}{\partial X_1}\left(-\frac{\partial E_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial X_3}\right), \qquad (۳-۳۶\text{ت})$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3\partial X_1}=\frac{\partial}{\partial X_2}\left(-\frac{\partial E_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial E_{12}}{\partial X_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial X_1}\right), \qquad (۳-۳۶\text{ث})$$

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{\partial}{\partial X_3}\left(-\frac{\partial E_{12}}{\partial X_3}+\frac{\partial E_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial E_{31}}{\partial X_2}\right). \qquad (۳-۳۶\text{ج})$$

44 - compatible

45 - simply-connected region

* به یک ناحیه مرتبط ساده از فضا گویند که در آن، هر منحنی بسته را بتوان با تغییر شکل پیوسته و بدون تلاقی با مرزهای ناحیه به یک نقطه تبدیل نمود. به عنوان مثال، میله منشوری توپر نشان داده شده در شکل (۳-۷ الف)، یک ناحیه مرتبط ساده است، حال آن که لوله منشوری شکل ۳-۷ ب مرتبط ساده نیست.

47 - single-valued

این شش معادله، به عنوان معادلات سازگاری[48] (یا شرایط انتگرال پذیری)[49]، شناخته می‌شوند.

لزوم این شرایط را به طریق زیر، به سادگی می‌توان اثبات نمود:

از

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = E_{11} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = E_{22},$$

به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2{}^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_2{}^2 \partial X_1} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1{}^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_1{}^2 \partial X_2}.$$

حال، چون بنا به فرض، طرف چپ معادلات فوق پیوسته است، لذا طرف راست نیز پیوسته می‌باشد و بنابراین مرتبه مشتق‌گیری مهم نیست، به طوری که:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2{}^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1{}^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right).$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2{}^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1{}^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} E_{12}.$$

پنج شرط دیگر را نیز می‌توان به طریق مشابه استخراج کرد. از اثبات این که شرایط، کافی نیز می‌باشند صرف نظر می‌کنیم (تحت شرایطی که در قضیه ذکر شد). در مثال (۳-۱۴) موقعیتی ارائه می‌شود که شرایط برای ناحیه‌ای که به هم پیوسته ساده نیستند، کافی نمی‌باشد.

مثال ۳-۱۲

آیا میدان کرنش زیر بیانگر یک میدان کرنش سازگار می‌باشد؟

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 2X_1 & X_1 + 2X_2 & 0 \\ X_1 + 2X_2 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2X_3 \end{bmatrix}$$

حل : چون هر مولفه از معادلات سازگاری، مستلزم مشتقات مرتبه دوم از مولفه‌های کرنش، نسبت به مختصات است،

---

48 - equations of compatibility

49 - inteegrability

تانسور کرنش فوق (که همه مولفه‌های آن تابع خطی از X_1، X_2، X_3 است) آنها را ارضا می‌نماید. واضح است که مولفه‌های کرنش داده شده توابع پیوسته، دارای مشتقات مرتبه دوم و پیوسته (در حقیقت مشتقات پیوسته از هر مرتبه) در هر ناحیه مقید یا کراندار [50] می‌باشند. بنابراین، وجود میدان تغییر مکان پیوستهٔ منحصر به فرد[51]، در هر ناحیه مرتبط سادهٔ مقید توسط قضیه فوق تائید می‌شود. در حقیقت، به سادگی می‌توان اثبات کرد که

$$u_1 = X_1^2 + X_2^2, \quad u_2 = 2X_1X_2 + X_1^2, \quad u_3 = X_3^2,$$

(البته هر نوع تغیر مکان جسم صلب را می‌توان به آنها افزود) یک میدان تغییر مکان پیوسته منحصر به فرد در هر ناحیه مقید (من‌جمله نواحی چند پارچه[52]) می‌باشد.

مثال ۳-۱۳

آیا مولفه‌های کرنش حاصل از تغییر مکانهای $u_1 = X_1^5, \quad u_2 = e^{X_1}, \quad u_3 = \sin X_2$ سازگارند؟

حل: هیچ نیازی به وارسی نیست، زیرا تغییر مکان u داده شده است (بنابراین وجود دارد).

مثال ۳-۱۴

آیا برای میدان کرنش زیر

$$E_{11} = -\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2}, \quad E_{12} = \frac{\frac{1}{2}X_1}{X_1^2 + X_2^2}, \quad E_{22} = E_{33} = E_{23} = E_{13} = 0, \qquad \text{(I)}$$

میدان تغییر مکان پیوستهٔ منحصر به فرد، برای جسم استوانه‌ای با سطح مقطع عمودی مطابق شکل ۳-۷ الف وجود دارد؟ برای جسم با سطح مقطع عمودی مطابق شکل ۳-۷ ب چطور؟

حل: از شکل شرط سازگاری، تنها شرط نخستین نیازمند وارسی است، شرایط دیگر به طور خودکار ارضا می‌شوند.

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial X_2} = -\frac{(X_1^2 + X_2^2) - X_2(2X_2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{X_2^2 - X_1^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2},$$

$$2\frac{\partial E_{12}}{\partial X_1} = \frac{(X_1^2 + X_2^2) - X_1(2X_1)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{X_2^2 - X_1^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2},$$

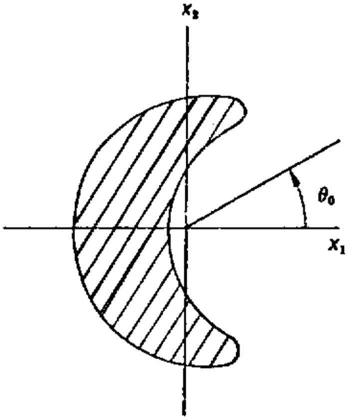
و

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2} = 0.$$

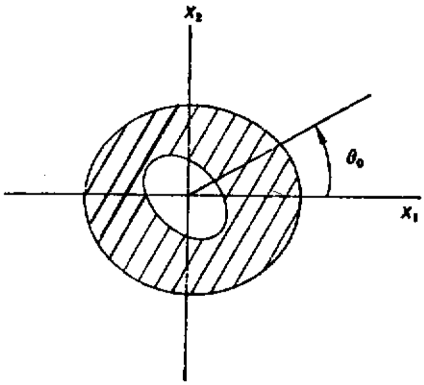
50 - bounded region

51 - single-valued continuous field displacement

52 - multiply-coonnected regions



شکل ۳-۷الف



شکل ۳-۷ب

بنابراین، معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2}=2\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

ارضا و از وجود پاسخ، اطمینان حاصل می‌شود. در حقیقت، به سادگی برای E_{ij} داده شده می‌توان اثبات نمود

$$u_1=\arctan\frac{X_2}{X_1},\quad u_2=0,\quad u_3=0, \tag{II}$$

(البته به آن، میدان تغییر مکان جسم صلب را می‌توان افزود) حال $arctan\ X_2/X_1$ یک تابع چند مقداره[۵۳] می‌باشد که دارای بی‌نهایت مقدار متناظر با یک نقطه $(X_3 ،X_2 ،X_1)$ است. به عنوان مثال برای نقطه $(X_3 ،X_2 ،X_1)=(1 ،0 ،0)$، $arctan\, X_2/X_1=0 ،2\pi ،4\pi ،\dots$ است. ایـن مـی‌توانـد بـا قـید $\theta_0\le arctan\, X_2/X_1<\theta_0+2\pi$ برای هر θ_0، تابع، تک مقداری یا منحصر به فرد شود. برای یک ناحیه مرتبط ساده (نظیر آن چه در شکل ۳-۷ الف نشان داده شده) θ_0 می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که معادله (II) را به یک تغییر مکان پیوسته منحصر به فرد برای ناحیه تبدیل کند. اما، برای جسم نشان داده شده در شکل ۳-۷ب تابع $u_1=arctan\ X_2/X_1$، تحت همان قید یا محدودیت[۵۴]، در امتداد خط $\theta=\theta_0$ در جسم ناپیوسته است (در حقیقت u_1 به میزان 2π در خط متقاطع[۵۵] پرش دارد). بنابراین، برای آنچه که

53 - multiple-valued function

54 - restriction

55 - crossing line

ناحیه مرتبط دوگانه[56] گفته می‌شود، یک تابع پیوسته منحصر به فرد u_1 برای E_{ij} داده شده وجود ندارد، هرچند که معادلات سازگاری ارضا شود.

۳-۱۱ - شرایط سازگاری برای مولفه‌های نرخ تغییر شکل

اگر هر سه تابع سرعت v_1، v_2، v_3 داده شده باشند، همواره می‌توان شش مولفه نرخ تغییر شکل را در هر ناحیه‌ای که مشتقات جزئی $\partial v_i/\partial x_j$ وجود داشته باشند، محاسبه نمود. از سوی دیگر، اگر شش مولفه D_{ij} به طور اختیاری در ناحیه‌ای مشخص شده باشند، در حالت کلی میدان سرعت v_i برای ارضای معادلات زیر وجود ندارد:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=D_{ij}.$$

شرایط پیوستگی برای مولفه‌های نرخ تغییر شکل، شبیه شرایط متناظر مولفه‌های کرنش بی‌نهایت کوچک می‌باشد [معادله (۳-۳۶)]، یعنی:

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_1{}^2}=2\,\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}\,,\ \text{etc.}$$

باید تاکید نمود که اگر فرد مستقیماً با توابع سرعت مشتق‌پذیر $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ سروکار داشته باشد (بدان‌گونه که در مکانیک سیالات متداول است)، اصولا مسئله سازگاری مطرح نیست.

مسائل

۳-۱ - حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = kt + X_1,$$
$$x_2 = X_2,$$
$$x_3 = X_3,$$

که مختصات مادی X_i، مربوط به موقعیت یک ذره در $t=0$ می‌باشند.

(الف) سرعت و شتاب ذره را در هر دو توصیف مادی و فضایی بیابید.

56 - double-connected region

(ب) اگر در یک توصیف فضایی میدان درجه حرارت $\theta=Ax_1$ باشد، مشتق مادی $D\theta/Dt$ را به دست آورید.

(ج) اگر درجه حرارت به صورت $\theta=Bx_2$ داده شود، بند (ب) را تکرار کنید.

۳-۲ - حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = X_1,$$
$$x_2 = kX_1^2t^2 + X_2,$$
$$x_3 = X_3,$$

که X_i، مختصات مادی هستند.

(الف) در زمان $t=0$ رئوس یک مربع واحد در $A(0,0,0)$، $B(0,1,0)$، $C(1,1,0)$ و $D(1,0,0)$ قرار دارند. موقیتهای A، B، C، D را در $t=1$ به دست آورده، و شکل جدید مربع را رسم کنید.

(ب) سرعت $\mathbf{V}$ و شتاب $D\mathbf{V}/DT$ را در توصیف مادی بیابید.

(پ) نشان دهید که میدان سرعت فضایی به صورت زیر داده می‌شود

$$v_1 = v_3 = 0, \quad v_2 = 2kx_1^2t.$$

۳-۳ - حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = kX_2^2t^2 + X_1,$$
$$x_2 = kX_2t + X_2,$$
$$x_3 = X_3.$$

(الف) در زمان $t=0$ رئوس یک مربع واحد در $A(0,0,0)$، $B(0,1,0)$، $C(1,1,0)$ و $D(1,0,0)$ قرار دارند. شکل مربع را در $t=2$ رسم کنید.

(ب) توصیف فضایی میدان سرعت را به دست آورید.

(پ) توصیف فضایی میدان شتاب را بیابید.

۳-۴ - حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = (k + X_1)t + X_1,$$
$$x_2 = X_2,$$
$$x_3 = X_3.$$

(الف) برای این حرکت، بند (الف) مسئله قبل را تکرار کنید.

(ب) سرعت و شتاب ذراتی را که از کنار مبدأ می‌گذرند، به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۳-۵ - حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0} X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

(الف) نشان دهید که زمان مرجع عبارت است از $t=t_0$

(ب) میدان سرعت را در مختصات فضایی بیابید.

(پ) نشان دهید که میدان سرعت فوق با حرکت زیر یکسان است:

$$x_1 = (1+t) X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

۳-۶ - (الف) نشان دهید که میدان سرعت: $v_i = \dfrac{x_i}{1+t}$

مربوط به حرکت زیر است:

$$x_i = X_i (1+t).$$

(ب) شتاب این حرکت را در توصیف مادی بیابید.

۳-۷ - در یک توصیف فضایی، معادلهٔ غیرخطی زیر برای محاسبه شتاب وجود دارد:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\, \mathbf{v}$$

یعنی اگر دو میدان سرعت $\mathbf{v}^A$ و $\mathbf{v}^B$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$\mathbf{a}^A + \mathbf{a}^B \neq \mathbf{a}^{A+B},$$

که $\mathbf{a}^A$ و $\mathbf{a}^B$ به ترتیب میدانهای شتاب متناظر با میدانهای سرعت $\mathbf{v}^A$ و $\mathbf{v}^B$ بوده، هرکدام به تنهایی وجود دارند، و $\mathbf{a}^{A+B}$ میدان شتاب متناظر با میدان سرعت مرکب $\mathbf{v}^A + \mathbf{v}^B$ است. این نامساوی را برای میدانهای سرعت زیر ثابت کنید:

$$\mathbf{v}^A = -2x_2\mathbf{e}_1 + 2x_1\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{v}^B = 2x_2\mathbf{e}_1 - 2x_1\mathbf{e}_2.$$

۳-۸ - حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = X_1,$$

$$x_2 = X_2 + (\sin \pi t)(\sin \pi X_1),$$

$$x_3 = X_3.$$

(الف) در $t=0$ یک تار یا رشته مادی بر خط مستقیمی که از (۰،۰،۰) به (۰،۰،۱) امتداد یافته، منطبق می‌شود. شکل تغییر یافته این تار را در $t=\frac{1}{2}$ و $t=1$ و $t=\frac{3}{2}$ رسم نمایید.

(ب) سرعت و شتاب را در توصیف مادی و فضایی به دست آورید.

۳-۹ - میدانهای سرعت و درجه حرارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v}=\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2}{x_1^2+x_2^2},\quad \theta=k(x_1^2+x_2^2).$$

(الف) سرعت را در چند موقعیت محاسبه کرده، طبیعت عمومی این میدان سرعت را مشخص کنید. شکل ایزوترمها چگونه است؟

(ب) شتاب و مشتق مادی میدان درجه حرارت را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

۳-۱۰ - مسئله ۳-۹ را برای میدانهای سرعت و درجه حرارت زیر انجام دهید:

$$\mathbf{v}=\frac{-x_2\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2}{x_1^2+x_2^2},\quad \theta=k(x_1^2+x_2^2).$$

۳-۱۱ - حرکت $\mathbf{x}=\mathbf{X}+X_1k\mathbf{e}_1$ را در نظر بگیریدو و فرض کنید که $d\mathbf{X}^1=(dS_1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ و $d\mathbf{X}^2=(dS_2/\sqrt{2})(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ دیفرانسیل المانهای مادی در هیات اولیه باشند.

(الف) المانهای تغییر شکل یافته $d\mathbf{X}^1$ و $d\mathbf{X}^2$ را بیابید.

(ب) کشیدگی این المانها، ds_1/dS_1 و ds_2/dS_2، و نیز تغییر در زاویه بین آنها را محاسبه کنید.

(پ) بند (ب) را با $k=1$ و $k=10^{-2}$، انجام دهید.

(ت) نتایج بند (پ) را با آن‌چه از تانسور کرنش کوچک $\mathbf{E}$ پیش‌بینی می‌شود، مقایسه نمایید.

۳-۱۲ - حرکت یک محیط پیوسته، از موقعیت اولیه $\mathbf{X}$ به موقعیت جاری $\mathbf{x}$ به صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{x}=(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{X},$$

که در آن، $\mathbf{I}$ تانسور واحد و $\mathbf{B}$ تانسوری با مولفه‌های ثابت (در مقایسه با واحد کوچک) می‌باشد. اگر مولفه‌های $\mathbf{x}$، x_i و مولفه‌های $\mathbf{X}$، X_j باشند، مطلوبست: (الف) مولفه‌های بردار تغییر مکان $\mathbf{u}$، (ب) تانسور کرنش کوچک $\mathbf{E}$.

۳-۱۳ - در زمان t، موقعیت ذره‌ای ابتدا در (X_1,X_2,X_3) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_1=X_1+kX_3,\quad x_2=X_2+kX_2,\quad x_3=X_3.$$

که در آن، $k=10^{5}$ است.

(الف) مولفه‌های تانسور کرنش را بیابید.

(ب) کشیدگی واحد المانی که نخست در جهت e_1+e_2 قرار داشته را به دست آورید.

۳-۱۴ - میدان تغییر مکان زیر را در نظر بگیرید:

$$u_1 = k(2X_1^2+X_1X_2), \quad u_2 = kX_2^2, \quad u_3 = 0.$$

که در آن، $k=10^{-4}$ است.

(الف) کشیدگیهای واحد و تغییر زاویه بین دو المان مادی $d\mathbf{X}^1=dX_1\mathbf{e}_1$ و $d\mathbf{X}^2=dX_2\mathbf{e}_2$ را بیابید (این دو المان از ذره‌ای با موقعیت $\mathbf{X}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ آغاز می‌شوند).

۳-۱۵ - برای میدان تغییر مکان مثال ۳-۹، فرض شود که قطر مکعب در جهت $e_1+e_2+e_3$ قرار داشته باشد، افزایش طول این قطر را محاسبه کنید: (الف) با استفاده از تانسور کرنش و (ب) به کمک روابط هندسی.

۳-۱۶ - نسبت به یک دستگاه مختصات x_1، x_2، x_3 حالت کرنش در یک نقطه، به صورت ماتریس زیر داده شده است:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

(الف) افزایش طول واحد در جهت $2e_1+2e_2+e_3$ چقدر است؟

(ب) تغییر زاویه بین دو خط عمود بر هم (در حالت اولیه) که از نقطه‌ای در جهت $2e_1+2e_2+e_3$ و $3e_1-6e_3$ آغاز شده، چقدر است؟

۳-۱۷ - مسئله قبل را برای (الف) افزایش طول واحد در جهت $3e_1-4e_2$، (ب) تغییر زاویه بین دو المان در جهت $3e_1-4e_3$ و $4e_1+3e_3$، انجام دهید.

۳-۱۸ - (الف) برای مسئله ۳-۱۶، پایاهای عددی حالت کرنش را محاسبه کنید، (ب) نشان دهید که ماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

نمی‌تواند نشانگر همان حالت کرنش مسئله ۳-۱۶ باشد.

۳-۱۹ - برای میدان تغییر مکان زیر

$$u_1 = kX_1^2,\quad u_2 = kX_2X_3,\quad u_3 = k(2X_1X_3 + X_1^2),\quad k = 10^{-6},$$

افزایش طول واحد حداکثر را برای المانی که نخست در (۱،۰،۰) قرار داشته، به دست آورید.

۳-۲۰ - میدان کرنش زیر داده شده است:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} k_1X_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2X_2 \end{bmatrix},$$

(الف) مکان ذره‌ای که دچار هیچ‌گونه تغییر حجمی نمی‌شود، پیدا کنید.

(ب) چه رابطه‌ای باید بین k_1 و k_2 برقرار باشد تا حجم هیچ المانی تغییر نکند؟

۳-۲۱ - برای هر حرکتی، جرم یک ذره ثابت باقی می‌ماند. فرض کنید که جرم حاصلضرب حجم در چگالی جرمی باشد، نشان دهید که (الف) برای تغییر شکل بی‌نهایت کوچک، $\rho(1+E_{kk})=\rho_\circ$ است، که در آن $\rho_\circ$ چگالی اولیه و ρ چگالی جاری است.

(ب) با استفاده از کوچکی E_{kk} نشان دهید که چگالی جاری به صورت رابطه زیر داده می‌شود:

$$\rho = \rho_0(1 - E_{kk}).$$

۳-۲۲ - کشیدگی واحد، در یک نقطه مشخص روی سطح جسمی به صورت تجربی توسط کرنش سنجهایی که زاویه ۴۵° با یکدیگر ساخته‌اند و در جهات e_1، $(\sqrt{2}/2)(e_1+e_2)$، و e_2 واقع، اندازه‌گیری می‌شود. اگر این کشیدگیهای واحد، به ترتیب با a، b، c نمایش داده شوند، مولفه‌های کرنش E_{11}، E_{22}، E_{12} چقدر می‌باشد؟

۳-۲۳ - (الف) مسئله ۳-۲۲ را حل کنید، اگر کرنشهای اندازه‌گیری شده به ترتیب ۲۰۰×۱۰^{-۶}، ۵۰×۱۰^{-۶}، ۱۰۰×۱۰^{-۶} باشند.

(ب) اگر $E_{33}=E_{32}=E_{31}=0$ باشد، کرنشهای اصلی و جهات اصلی بند (الف) را بیابید.

(پ) اگر $E_{33}\neq 0$ باشد نتایج بند (ب) چگونه تغییر خواهند نمود؟

۳-۲۴ - مسئله ۳-۲۳ را چنانچه $a=b=c=۱۰۰۰\times۱۰^{-۶}$ باشند، تکرار کنید.

۳-۲۵ - کشیدگیهای واحد، در یک نقطه مشخص روی سطح جسمی (به صورت تجربی توسط کرنش سنجهایی که زاویه ۶۰° با یکدیگر ساخته‌اند که به آن رزت کرنش ۶۰° گفته می‌شود)، در جهات e_1، $\frac{1}{2}$

$(\mathbf{e}_1+\sqrt{3}\mathbf{e}_2)$ و $(-\mathbf{e}_1+\sqrt{3}\mathbf{e}_2)\frac{1}{2}$ اندازه‌گیری شده است. اگر این تغییر طولهای واحد، به ترتیب با a، b، c نمایش داده شوند، مولفه‌های کرنش E_{11}، E_{22}، E_{12} را به دست آورید.

۳-۲۶ - مسئله ۳-۲۵ را حل کنید اگر کرنشهای اندازه‌گیری شده، به ترتیب $a=2\times10^{-4}$، $b=1\times10^{-4}$، $c=1.5\times10^{-4}$ باشند.

۳-۲۷ - مسئله ۳-۲۶ را حل کنید اگر $a=b=c=2000\times10^{-6}$ باشند.

۳-۲۸ - برای میدان سرعت $\mathbf{v}=(kx_2^2)\mathbf{e}_1$، (الف) تانسورهای نرخ تغییر شکل و چرخش[57] را بیابید.

(ب) نرخ کشش یک المان مادی $d\mathbf{x}=(ds)\mathbf{n}$ را بیابید، که در آن، $\mathbf{n}=(\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ در موقعیت $\mathbf{x}=5\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$ می‌باشد.

۳-۲۹ - برای میدان سرعت زیر

$$\mathbf{v}=\left(\frac{t+k}{1+x_1}\right)\mathbf{e}_1.$$

نرخ کشش المانهای مادی $d\mathbf{x}^1=(ds_1)\mathbf{e}_1$ و $d\mathbf{x}^2=(ds_2/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ را هنگامی‌که در $t=1$ از مبدأ می‌گذرند، پیدا کنید.

۳-۳۰ - (الف) تانسورهای نرخ تغییر شکل و چرخش را برای میدان سرعت $\mathbf{v}=(\cos t)(\sin\pi x_1)\mathbf{e}_2$ بیابید.

(ب) برای میدان سرعت بند (الف)، نرخ کشش المانهای مادی $d\mathbf{x}^1=(ds_1)\mathbf{e}_1$، $d\mathbf{x}^2=(ds_2)\mathbf{e}_2$، $d\mathbf{x}^3=(ds_3/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ را در $t=0$ و در مبدأ به دست آورید.

۳-۳۱ - برای میدان سرعت مسئله ۳-۹:

(الف) تانسورهای نرخ تغییر شکل و چرخش را بیابید.

(ب) نرخ کشش یک المان خط مادی شعاعی را پیدا کنید.

۳-۳۲ - به حرکتی غیرچرخشی گفته می‌شود که تانسور چرخش آن صفر باشد. نشان دهید که میدان سرعت مسئله ۳-۱۰ یک حرکت غیر چرخشی را توصیف می‌کند.

۳-۳۳ - (الف) فرض کنید که $d\mathbf{x}^1=(ds_1)\mathbf{n}$ و $d\mathbf{x}^2=(ds_2)\mathbf{m}$ دو المان مادی هستند (که از ذره p که در

57 - spin

حال حاضر دارای نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ است) صادر می‌شوند. به کمک $(D/Dt)(d\mathbf{x}^1.d\mathbf{x}^2)$ نشان دهید که:

$$\left(\frac{1}{ds_1}\frac{D(ds_1)}{Dt}+\frac{1}{ds_2}\frac{D(ds_2)}{Dt}\right)\cos\theta-(\sin\theta)\frac{D\theta}{Dt}=2\mathbf{m}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n},$$

که θ زاویه بین $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ می‌باشد.

(ب) حالتهای خاص (I) $d\mathbf{x}^1=d\mathbf{x}^2$، (II) $\theta=\pi/2$ را در نظر گرفته، نشان دهید که چگونه این عبارت به نتایج بخش ۳-۸ منجر می‌شود.

۳-۳۴ - فرض کنید که $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ و D_1 ، D_2 ، D_3 جهات اصلی و مقادیر اصلی تانسور نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ باشند. به علاوه، فرض کنید که $d\mathbf{x}^1=(ds_1)\mathbf{e}_1$ ، $d\mathbf{x}^2=(ds_2)\mathbf{e}_2$ ، $d\mathbf{x}^3=(ds_3)\mathbf{e}_3$ سه المان خط مادی باشند. با در نظر گرفتن مشتق مادی $(D/Dt)[d\mathbf{x}^1.(d\mathbf{x}^2\times d\mathbf{x}^3)]$ نشان دهید که برای حجم بی‌نهایت کوچک $dV=(ds_1)(ds_2)(ds_3)$ داریم:

$$\Delta=\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt}=D_1+D_2+D_3.$$

۳-۳۵ - المان مادی $d\mathbf{x}=ds\mathbf{n}$ را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید که $(D/Dt)(\mathbf{n})=\mathbf{D}\mathbf{n}+\mathbf{W}\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n})\mathbf{n}$

(ب) نشان دهید که اگر $\mathbf{n}$ یک بردار ویژه $\mathbf{D}$ باشد، $(D/Dt)(\mathbf{n})=\mathbf{W}\mathbf{n}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}$، که در آن، $\boldsymbol{\omega}$ بردار دوگان $\mathbf{W}$ است.

۳-۳۶ - میدان سرعت زیر، برای یک سیال تراکم ناپذیر داده شده است:

$$v_1=k(x_2-2)^2x_3,$$
$$v_2=-x_1x_2,$$
$$v_3=kx_1x_3.$$

k را به گونه‌ای محاسبه کنید که معادله بقای جرم ارضا شود.

۳-۳۷ - آیا حرکت سیال توصیف شده در قسمت (الف) مسئله ۳-۹ و قسمت (ب) مسئله ۳-۱۰ تراکم ناپذیر است؟

۳-۳۸ - در یک توصیف فضایی، چگالی یک سیال تراکم ناپذیر به صورت $\rho=kx_2$ داده شده است.

با توجه به $V_3=0$، شکل مجاز میدان سرعت را برای ارضای معادله بقای جرم بیابید.

۳ـ ۳۹ ـ میدان سرعت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x_1}{1+t}\right)\mathbf{e}_1.$$

(الف) چگالی را بیابید اگر، مستقل از موقعیت فضایی باشد، یعنی: $\rho = \rho(t)$

(ب) چگالی را بیابید چنان چه، تنها تابع x_1 باشد.

۳ـ ۴۰ ـ میدان سرعت زیر داده شده است

$$\mathbf{v} = x_1 t\mathbf{e}_1 + x_2 t\mathbf{e}_2,$$

چنان چه در یک توصیف فضایی، چگالی تنها تابع زمان باشد، محاسبه کنید که چگالی سیال بر حسب زمان چگونه تغییر می‌کند؟

۳ـ ۴۱ ـ وارسی کنید که آیا توزیع کرنش زیر، شرایط سازگاری را ارضا میکند:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} X_1+X_2 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2+X_3 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_1+X_3 \end{bmatrix}.$$

۳ـ ۴۲ ـ وارسی کنید که آیا توزیع حالت کرنش زیر، شرایط سازگاری را ارضا می‌کند:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} X_1^2 & X_2^2+X_3^2 & X_1X_3 \\ X_2^2+X_3^2 & 0 & X_1 \\ X_1X_3 & X_1 & X_2^2 \end{bmatrix}.$$

۳ـ ۴۳ ـ آیا میدان تغییر مکان $u_1 = \sin X_1,\quad u_2 = X_1^3X_2,\quad u_3 = \cos X_3$ متناظر با یک میدان کرنش سازگار است؟

۳ـ ۴۴ ـ میدان کرنش زیر داده شده است:

$$E_{12} = E_{21} = X_1X_2,$$

و بقیه مولفه‌های $E_{ij}=0$ می‌باشند.

(الف) آیا این میدان، معادلات سازگاری را ارضا می‌کند؟

(ب) ضمن تلاش برای انتگرال گیری میدان کرنش، نشان دهید که این میدان نمی‌تواند متناظر با یک میدان تغییر مکان باشد.

۳-۴۵ - مولفه‌های کرنش به صورت روابط زیر داده شده است:

$$E_{11}=\frac{1}{\alpha}f(X_2,X_3),\quad E_{22}=E_{33}=-\frac{\nu}{\alpha}f(X_2,X_3),$$
$$E_{12}=E_{13}=E_{23}=0.$$

نشان دهید که برای سازگار بودن میدان فوق، $f(X_2,X_3)$ باید خطی باشد.

۳-۴۶ - با استفاده از نتایج مسئله ب ۵۰، مولفه‌های شتاب را در دستگاه مختصات استوانه‌ای - به صورت زیر - به دست آورید:

$$a_r=\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\phi^2}{r}.$$

$$a_\phi=\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{v_r v_\phi}{r}$$

$$a_z=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

۳-۴۷ - با استفاده از نتایج مسئله ب ۵۰، مولفه‌های $\mathbf{E}$ (تانسور کرنش) را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (با توجه به این که u_r، u_ϕ، u_z نمایشگر مولفه‌های تغییر مکان هستند) به صورت زیر بیابید:

$$E_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad E_{\phi\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_r}{r},\quad E_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$E_{r\phi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}-\frac{u_\phi}{r}+\frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right),\quad E_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

و

$$E_{\phi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\phi}\right).$$

۳-۴۸ - با استفاده از نتیجه مسئله ب ۵۰، مولفه‌های $\mathbf{D}$ (تانسور نرخ تغییر شکل) را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (با توجه به این که v_r، v_ϕ، v_z نمایشگر مولفه‌های سرعت می‌باشند) به صورت زیر به دست آورید:

$$D_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r},\quad D_{\phi\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_r}{r},\quad D_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$D_{r\phi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right),\quad D_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

$$D_{\phi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}\right).$$

۳-۴۹ - با استفاده از نتیجه مسئله ب ۵۰، مولفه‌های تانسور چرخش $\mathbf{W}$ را در دستگاه مختصات

استوانه‌ای به صورت زیر به دست آورید:

$$W_{rr} = W_{\phi\phi} = W_{zz} = 0,$$

$$W_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) = -W_{\phi r}, \quad W_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -W_{zr},$$

$$W_{\phi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right) = -W_{z\phi}.$$

۳ - ۵۰ - در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,ϕ,z)، یک دیفرانسیل حجم را در نظر بگیرید که توسط سه جفت وجه $r=r_0$ ، $z=z_0+dz$ $r=r_0+dr$ ، $\phi=\phi_0$ ، $\phi=\phi_0+d\phi$ ، $z=z_0$ ، محدود شده است. نرخی که تحت آن، جرم، از طریق وجه $r=r_0$ به داخل حجم، جریان می‌یابد به صورت $(\rho v_r)(r d\phi)(dz)$ داده می‌شود (عبارات مشابهی برای وجوه دیگر می‌توان داشت). با توجه به این که جریان خالص ورودی جرم باید برابر با نرخ افزایش جرم داخل حجم باشد، معادله بقای جرم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر به دست آورید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

۳ - ۵۱ - شکل پایای معادله بقای جرم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho)\cdot \mathbf{v} + \rho(\mathrm{tr}\,\mathbf{D}) = 0,$$

که در آن $tr\mathbf{D}=D_{ii}$ می‌باشد.

با استفاده از نتایج مسائل ب ۴۷ و ۳ - ۴۸،معادله مسئله ۳ - ۵۰ را مجدداً استخراج کنید.

فصل ۵

تنش

در فصل قبل، صرفاً توصیف سینماتیکی حرکت یک محیط پیوسته را در نظر گرفتیم، بدون هیچ گونه ملاحظهٔ نیروهایی که موجب حرکت و تغییر شکل می‌شوند. در این فصل، به بررسی ابزار توصیف کنندهٔ نیروها در داخل یک جسم، می‌پردازیم. به طور کلی، اینک پذیرفته شده است که ماده، مرکب از مولکولهایی است که مولکولها خود شامل اتمها و ذرات زیر اتمی می‌باشند. بنابراین، نیروهای داخلی در مادهٔ حقیقی عبارت اند از نیروهایی که بین ذرات فوق وجود دارند. در نظریه محیط پیوسته کلاسیک، نیروهای داخلی از طریق مفهوم نیروهای حجمی[۱] و نیروهای سطحی معرفی می‌شوند. نیروهای حجمی، نیروهایی هستند که به تمامی حجم ماده (نظیر جاذبه، الکترواستاتیک و غیره و با یک برهم کنش از راه دور با ماده یا بار در یک فاصله) وارد می‌شوند. فرض می‌کنیم که توصیف نیروی سطحی در یک نقطه از یک سطح، از طریق تعریف بردار تنش[۲] -موصوف در بخش ۴-۲ - و بدون توجه به انحنای سطح در آن نقطه، صورت می‌گیرد. چنین فرضی، به عنوان اصل تنش کوشی[۳] (که یکی از فضایای بدیهی مکانیک محیط پیوسته کلاسیک می‌باشد) مشهور است.

---

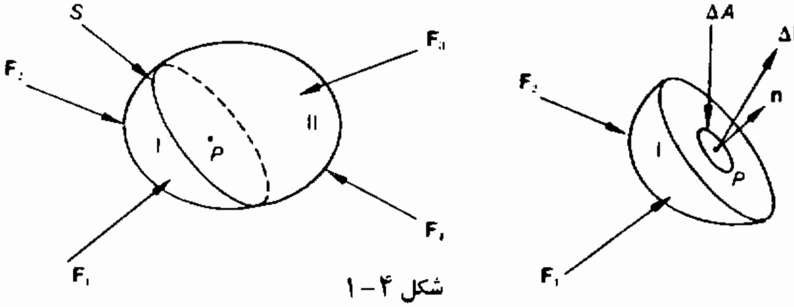
1 - body forces

2 - stress vector

3 - Cauchy's stress principle

۴-۱ - بردار تنش

جسم نشان داده شده در شکل ۴ - ۱ را در نظر بگیرید. صفحه‌ای[4] نظیر S را فرض کنید که از یک نقطه داخلی و اختیاری P می‌گذرد و دارای بردار یکهٔ عمود $\mathbf{n}$ می‌باشد این صفحه جسم را به دو بخش مجزا تقسیم می‌کند. یک بخش در طرف پیکان $\mathbf{n}$ قرار گرفته (که در شکل توسط II نشان داده شده است) و بخش دیگر در امتداد $\mathbf{n}$ واقع شده است (بخش I در شکل). بخش I را به صورت یک پیکره آزاد در نظر بگیرید. در صفحه S، برآیند نیروی $\Delta\mathbf{F}$ - وارده روی مساحت کوچک ΔA - مشتمل بر نقطه P وجود خواهد داشت.



شکل ۴ - ۱

بردار تنش (از II به I) را در نقطه P روی صفحه S، به صورت حد نسبت $\Delta\mathbf{F}/\Delta A$ وقتی $\Delta A \to 0$ تعریف می‌کنیم. یعنی:

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \qquad (۴-۱)$$

اگر بخش I به عنوان پیکره آزاد در نظر گرفته شود، طبق قانون عمل و عکس‌العمل نیوتن، یک بردار تنش (از I به II) $\mathbf{t}_{-n}$ در همان نقطه و روی همان صفحه خواهیم داشت که از نظر مقدار، برابر و در جهت مخالف (با معادله ۴ - ۱ داده می‌شود) می‌باشد. یعنی:

$$\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{-n}. \qquad (۴-۲)$$

حال، فرض کنید که S سطحی[5] باشد (به جای یک صفحه) که از نقطه P می‌گذرد و $\Delta\mathbf{F}$ برآیند نیروی

4 - plane

5 - surface

روی یک مساحت کوچک ΔS - از سطح S - باشد. بردار تنش در P روی I، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}.$$

حال، اصل تنش کوشی را به صورت زیر بیان می‌کنیم. بردار تنش در هر مکان و زمان داده شده، دارای یک مقدار مشترک روی تمامی بخشهای ماده (که دارای یک صفحه مشترک مماس بر P و در همان طرف آن قرار دارد) می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر $\mathbf{n}$ برداریکه به طرف خارج* و عمود بر صفحه مماسی باشد، آن گاه:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}),$$

که در آن، t نمایشگر زمان است.

در بخش بعد، نشان خواهیم داد که این وابستگی به $\mathbf{n}$، در حقیقت خطی است. یعنی:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{n},$$

۴-۲ - تانسور تنش

فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک تبدیل باشد و $\mathbf{n}$ برداریکه عمود بر یک صفحه. در این صورت، بردار تنش روی صفحه (از ماده‌ای که در جهت پیکان $\mathbf{n}$ قرار گرفته است) به صورت رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{T}\mathbf{n}. \qquad (۴-۳)^{**}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن، متعاقباً نشان داده خواهد شد که در حقیقت $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است، یعنی یک تانسور مرتبه دو.

فرض کنید که یک چهار وجهی کوچک از جسم منفک شده و نقطه P روی یکی از رئوس آن قرار گرفته باشد (شکل ۴ - ۲ را ببینید). اندازه چهار وجهی، در نهایت به صفر نزدیک می‌شود به طوری که در حد، صفحه مورد نظر از نقطه P خواهد گذشت. از معادلات (۴ - ۲) و (۴ - ۳)، بردار تنش روی وجه PAB (که عمود به طرف خارج آن در جهت $-\mathbf{e}_1$ است) به صورت عبارت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1} = -\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_1. \qquad (\text{الف})$$

---

* یعنی به طرف خارج ماده

** این معادله گاه به عنوان قضیه بنیادی کوشی شناخته می‌شود.

به طور مشابه، بردارهای تنش روی وجوه PBC و PAC به ترتیب عبارت اند از:

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{e}_2} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_2 \tag{ب}$$

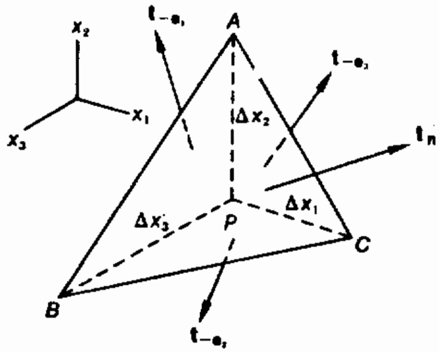
و

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{e}_3} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_3 \tag{پ}$$

بنابراین، با توجه به این که ΔA_1، ΔA_2، ΔA_3، ΔA_n به ترتیب مساحتهای PAB، PBC، PAC و ABC را نشان می‌دهند، از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}(\Delta A_1) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_2}(\Delta A_2) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_3}(\Delta A_3) + \mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\Delta A_n) = m\mathbf{a}. \tag{ت}$$

چون جرم m برابر(حجم)* (چگالی) است و حجم چهار وجهی، متناسب با حاصل ضرب سه طولِ بی‌نهایت کوچک می‌باشد، (در حقیقت $\frac{1}{6}\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$)، هنگامی که اندازه چهار وجهی، به صفر نزدیک شود، طرف راست معادله (ب) سریعتر از جملات طرف چپ، به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین در حد، جمله مربوط به شتاب، دقیقاً از معادله (ت) حذف می‌شود.***



شکل ۴-۲

فرض کنید که بردار یکهٔ عمود بر صفحه مورب ABC عبارت باشد از:

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3. \tag{ث}$$

*** توجه کنید که هر نوع نیروی حجمی (مثلا وزن) وارده، به لحاظ مقدار، از همان مرتبهٔ شتاب خواهد بود و لذا حذف خواهد شد.

مساحتهای ΔA_1، ΔA_2، ΔA_3، که تصاویر ΔA_n می‌باشند، توسط روابط زیر به ΔA_n مرتبط می‌شوند:

$$\Delta A_1 = n_1 \Delta A_n, \quad \Delta A_2 = n_2 \Delta A_n, \quad \Delta A_3 = n_3 \Delta A_n. \tag{ج}$$

با استفاده از معادلات (الف)، (ب) ، (پ)، (ت) و (۴ - ۳)معادله(ت) چنین می‌شود:

$$\mathbf{T}(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) = n_1(\mathbf{Te}_1) + n_2(\mathbf{Te}_2) + n_3(\mathbf{Te}_3).$$

بنابراین، $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است و به آن تانسور تنش گویند.

۴-۳ - مولفه‌های تانسور تنش

از

$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = \mathbf{Te}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3,$$

مشاهده می‌شود که T_{11} مولفه عمودی یا تنش عمودی و T_{21} و T_{31} مولفه‌های مماسی یا تنش برشی بردار تنش $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}$ (روی صفحه‌ای که عمود بر آن $\mathbf{e}_1$ است)می‌باشد.* روی‌این صفحه‌که مقدار تنشهای مماسی یا برشی برابر $(T_{21}^2+T_{31}^2)^{1/2}$ است. تفسیرهای مشابهی برای مولفه‌های دیگر $\mathbf{T}$ می‌توان ارائه کرد. عناصر قطری T_{11}، T_{22}، و T_{33} تنشهای عمودی[10] و عناصر غیر قطری T_{21}، T_{31}، T_{12}، T_{32}، T_{13} و T_{23}، تنشهای برشی[11] می‌باشند.

با رابطهٔ** $\mathbf{t}=\mathbf{Tn}$، مولفه‌های $\mathbf{t}$، به مولفه‌های $\mathbf{T}$ و $\mathbf{n}$ (به صورت زیر) مرتبط می‌شوند:

$$t_i = T_{ij} n_j \tag{۴-۴ الف}$$

یا به شکل متداولتر برای محاسبات:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{n}]. \tag{۴-۴ ب}$$

بنابراین، واضح است که اگر ماتریس $\mathbf{T}$ معلوم باشد، بردار تنش $\mathbf{t}$ روی هر صفحه مورب، به صورت منحصر به فرد، از معادله فوق محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر، حالت تنش در یک نقطه، به کمک

---

* برخی از مولفان قرار داد $\mathbf{t}_n=\mathbf{T}^T\mathbf{n}$ را به کار می‌برند و لذا $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i}=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{e}_j$ می‌باشد. به عنوان مثال، بنابراین قرارداد، $\mathbf{T}_{21}$ و $\mathbf{T}_{23}$ مولفه‌های مماسی $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}$ روی صفحهٔ عمود بر $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}$ می‌باشد، و به همین ترتیب. این تفاوتها در معنی با توجه به عناصر غیر قطری $\mathbf{T}$ در ارتباط با تقارن $\mathbf{T}$ از بین می‌رود.

10 - normal stress

11- shearing stress

** هرگاه مطلب گنگ نشود، شاخص $\mathbf{n}$ را از $\mathbf{t}_n$ حذف می‌کنیم.

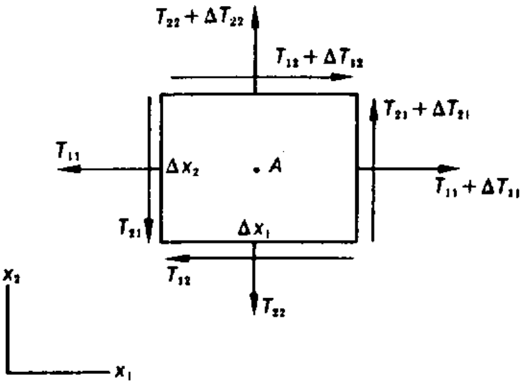
تانسور تنش $\mathbf{T}$ کاملا مشخص می‌شود. همچنین چون $\mathbf{T}$ یک تانسور درجه دو می‌باشد، هر ماتریس از $\mathbf{T}$، ماتریسهای دیگر $\mathbf{T}$ را -از معادله (ب ۲۹) از فصل ۲ - به دست می‌دهد.

۴-۴ - تقارن تانسور تنش - اصل ممان اندازه حرکت

حال، با استفاده از معادله ممان اندازه حرکت برای یک المان بسیار کوچک، نشان خواهیم داد که در حالت کلی، تانسور تنش یک تانسور متقارن است.[***]

نمودار پیکره آزاد یک المان منفک شده از یک جسم، در شکل ۴-۳ نماش داده شده است. اگر ممان تمامی نیروها را حول محوری که از نقطه مرکزی A گذشته و موازی با محور x_3 می‌باشد، بیابیم:

$$\Sigma M_A = T_{21}(\Delta x_2 \Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right) + (T_{21}+\Delta T_{21})\,(\Delta x_2 \Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_1}{2}\right)$$
$$- T_{12}(\Delta x_1 \Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right) - (T_{12}+\Delta T_{12})\,(\Delta x_1 \Delta x_3)\left(\frac{\Delta x_2}{2}\right).$$



شکل ۴-۳

با حذف جملات شامل کمیتهای کوچک با مرتبه بالا، به دست می‌آید:

$$\Sigma M_A = (T_{21} - T_{12})\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

*** مسئله ۴-۲۰ را برای حالتی که در آن تانسور تنش متقارن نیست، ببینید.

حال، چه المان در تعادل استاتیکی باشد و یا نباشد، چون جمله مربوط به شتاب زاویه‌ای، متناسب با حاصل ضرب حجم در مجذور طول* می‌باشد، بنابراین، یک کمیت کوچک با مرتبه بالاتر از طرف راست معادله بالا خواهد بود و ΣM_A برابر صفر می‌شود. بنابراین $T_{12}=T_{21}$. اثبات مشابه، منجر به $T_{13}=T_{31}$ و می‌شود. یعنی:

$$T_{12}=T_{21},\quad T_{13}=T_{31},\quad T_{23}=T_{32}, \tag{۴-۵}$$

که به معنای متقارن بودن $\mathbf{T}$ می‌باشد.

مثال ۴-۱

حالت تنش در یک نقطهٔ مشخص، عبارت است از $\mathbf{T}=-p\mathbf{I}$ که p یک عددی است. نشان دهید که هیچ گونه تنش برشی روی هر صفحهٔ شامل این نقطه، وجودنخواهد داشت.

حل: بردار تنش روی هر صفحه‌ای که از این نقطه گذشته و $\mathbf{n}$ عمود بر آن باشد، عبارت است از:

$$\mathbf{t}=\mathbf{T}\mathbf{n}=-p\mathbf{I}\mathbf{n}=-p\mathbf{n}.$$

بنابراین عمود بر صفحه می‌باشد. این حالت ساده تنش، حالت فشار هیدرو استاتیک گفته می‌شود.

مثال ۴-۲

در دستگاه مختصات x، y، z، ماتریس تنش، در یک نقطه مشخص از یک جسم، به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\mathbf{T}]=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\mathrm{MPa}$$

(الف) بردار تنش و مقدار تنش عمودی روی صفحه‌ای که از این نقطه گذشته، موازی صفحه $x+2y+2z-6=0$ باشد را بیابید.

(ب) اگر $\mathbf{e}_1'=(\frac{1}{3})(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$ و $\mathbf{e}_2'=(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$، T_{12}' را بیابید.

حل: (الف) صفحه $x+2y+2z-6=0$ دارای بردار یکه عمود $\mathbf{n}$ می‌باشد که

$$\mathbf{n}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3).$$

---

* جمله شتاب زاویه‌ای $(\mathbf{I}_A)_{33}\alpha_3$ است که در آن، $(\mathbf{I}_A)_{33}=(\text{چگالی})*(\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3)[(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2]$ و α_3 مولفه x_3 شتاب زاویه‌ای است.

بردار تنش از معادله (۴-۴) به صورت زیر به دست می آید:

$$[\mathbf{t}] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{n}] = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}16\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{t} = \left(\frac{1}{3}\right)(16\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

مقدار تنش عمودی، به سادگی به دست می آید، با $T_n \equiv T_{(n)(n)}$

$$T_n = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{1}{9}\right)(16+8+2) = 2.89\ \text{MPa}.$$

(ب) برای یافتن مولفه‌های پریم دار تنش، داریم:

$$T'_{12} = \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}[2,2,1]\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

بنابراین :

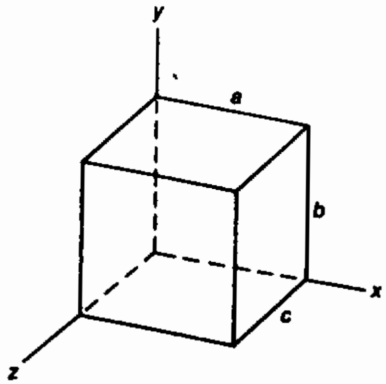
$$T'_{12} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = 1.65\ \text{MPa}.$$

مثال ۴-۳

توزیع تنش در داخل جسمی، به صورت ماتریس زیر داده شده است:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix}-p+\rho g y & 0 & 0\\ 0 & -p+\rho g y & 0\\ 0 & 0 & -p+\rho g y\end{bmatrix},$$

که در آن، p، ρ و g ثابت می‌باشند. شکل ۴-۴ یک قطعه مکعب مستطیل در داخل جسم را نشان می‌دهد .



شکل ۴-۴

(الف) توزیع بردار تنش روی شش وجه این قطعه چگونه است.

(ب) کل منتجه نیروی وراده روی وجوه $y=0$ و $x=0$ را بیابید.

حل: (الف) از $\mathbf{t}=\mathbf{Tn}$ داریم:

$$x=0,\quad [\mathbf{n}]=[-1,\ 0,\ 0],\quad [\mathbf{t}]=[p-\rho g y, 0, 0];$$

$$x=a,\quad [\mathbf{n}]=[+1,\ 0,\ 0],\quad [\mathbf{t}]=[-p+\rho g y, 0, 0];$$

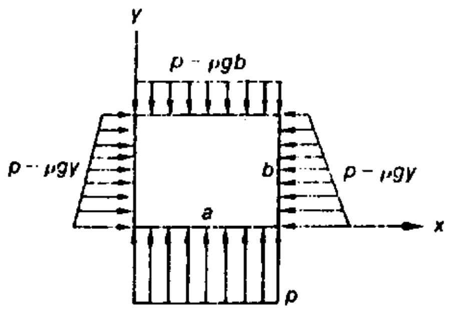
$$y=0,\quad [\mathbf{n}]=[\ 0, -1,\ 0],\quad [\mathbf{t}]=[0, p, 0];$$

$$y=b,\quad [\mathbf{n}]=[\ 0, +1,\ 0],\quad [\mathbf{t}]=[0, -p+\rho g b, 0];$$

$$z=0,\quad [\mathbf{n}]=[\ 0,\ 0, -1],\quad [\mathbf{t}]=[0, 0, p-\rho g y];$$

$$z=c,\quad [\mathbf{n}]=[\ 0,\ 0, +1],\quad [\mathbf{t}]=[0, 0, -p+\rho g y].$$

یک مقطع از توزیع بردار تنش در شکل ۴-۵ نشان داده شده است.



شکل ۴-۵

(ب) روی وجه $y=0$ کل نیرو برابر است با: $\mathbf{F}_1=\int \mathbf{t}\,dA=\left[p\int dA\right]\mathbf{e}_2=p(ac)\mathbf{e}_2.$

روی وجه $x=0$ کل نیرو برابر است با:

$$\mathbf{F}_2=\left[\int (p-\rho g y)\,dA\right]\mathbf{e}_1=\left[p\int dA-\rho g\int y\,dA\right]\mathbf{e}_1.$$

انتگرال دوم را مستقیماً با جایگزینی (dA) با $(c\,dy)$ و انتگرال گیری از $y=0$ تا $y=b$ می‌توان به دست آورد. یا چون $\int y\,dA$ نخستین ممان مساحت وجه، حول محور z می‌باشد، برابر حاصل ضرب فاصله مرکز ثقل[15] در کل

15 - centroid

مساحت است. بنابراین:

$$\mathbf{F}_2 = \left[p(bc) - \frac{\rho g b^2 c}{2}\right]\mathbf{e}_1.$$

۴-۵ - تنشهای اصلی

از فصل ۲ دریافتیم که برای هر تانسور متقارن T، حداقل سه جهت اصلی عمود بر هم وجود دارند (بردارهای ویژه T). صفحاتی که این جهات، عمود بر آنها هستند، به عنوان صفحات اصلی[16] شناخته می‌شوند. روی این صفحات، بردار تنش عمود بر صفحه بوده (یعنی تنش برشی وجود ندارد) تنشهای عمودی به عنوان تنشهای اصلی[17] شناخته می‌شوند. بنابراین، تنشهای اصلی (مقادیر ویژه T) شامل مقادیر حداقل و حداکثر تنشهای عمودی بین تمامی صفحاتی که از یک نقطه داده شده می‌گذرند، می‌باشند.

تنشهای اصلی از معادله مشخصه T به دست می‌آیند، که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

که

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix},$$

و

$$I_3 = \det\,[T_{ij}]$$

سه پایای عددی تانسور تنش هستند. برای محاسبه جهات اصلی، خواننده را به فصل ۲ ارجاع می‌دهیم.

۴-۶ - تنش برشی حداکثر

در این بخش، نشان خواهیم داد که تنش برشی حداکثر برابر است با نصف تفاوت بین تنشهای اصلی حداکثر و حداقل و روی صفحه‌ای که زاویه بین جهات تنشهای اصلی حداقل حداکثر را به دو نیمه تقسیم می‌کند، وارد می‌شود.

فرض شود که $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ جهات اصلی T بوده، T_1، T_2 و T_3 تنشهای اصلی باشند. اگر

---

16 - principal planes

17- principal stresses

$\mathbf{n}=n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3$ بردار یکهٔ عمود بر صفحه باشد، مولفه‌های بردار تنش روی صفحه با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1T_1 \\ n_2T_2 \\ n_3T_3 \end{bmatrix},$$

یعنی:

$$\mathbf{t} = n_1T_1\mathbf{e}_1 + n_2T_2\mathbf{e}_2 + n_3T_3\mathbf{e}_3. \qquad (۷-۴)$$

و تنش عمودی روی همین صفحه به صورت زیر داده می‌شود.

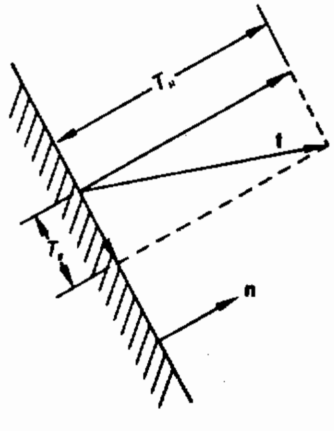
$$T_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t} = n_1^2T_1 + n_2^2T_2 + n_3^2T_3. \qquad (۸-۴)$$

بنابراین، اگر T_s نشانگر مقدار تنش برشی کل، روی صفحه باشد، داریم (شکل ۴-۶ را ببینید)

$$T_s^2 = |\mathbf{t}|^2 - T_n^2, \qquad (۹-۴)$$

یعنی

$$T_s^2 = T_1^2n_1^2 + T_2^2n_2^2 + T_3^2n_3^2 - (T_1n_1^2 + T_2n_2^2 + T_3n_3^2)^2. \qquad (۱۰-۴)$$



شکل ۴-۶

برای به دست آوردن (n_1, n_2, n_3) که برای آنها T_s^2 حداکثر یا حداقل است، تمامی سه عضویهای (n_1, n_2, n_3) را طوری به دست می‌آوریم که برای آنها T_s^2 پایدار باشد. به این معنا که دیفرانسیل کل $d(T_s^2)$ صفر شود. یعنی:

$$d(T_s^2) = \frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_1}dn_1 + \frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_2}dn_2 + \frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_3}dn_3 = 0. \qquad (1)$$

اگر dn_1، dn_2 و dn_3 به صورت مستقل از یکدیگر بتوانند تغییر نمایند، آن‌گاه (I) شرایط آشنای زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_1}=0,\quad \frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_2}=0,\quad \text{and}\quad \frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_3}=0.$$

اما n_iها توسط عبارت زیر به یکدیگر ربط می‌یابند:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1, \tag{II}$$

بنابراین :

$$n_1dn_1+n_2dn_2+n_3dn_3=0. \tag{III}$$

یعنی dn_iها نمی‌توانند مستقل از یکدیگر تغییر نمایند.

با ضرب معادله (III) در مضرب[18] اختیاری λ و سپس تفریق آن از معادله (I)، به دست می‌آید:

$$d(T_s^2)=\left(\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_1}-\lambda n_1\right)dn_1+\left(\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_2}-\lambda n_2\right)dn_2+\left(\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_3}-\lambda n_3\right)dn_3=0.$$

حال λ را در مقدار پایدار T_s برابر مقدار زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\frac{1}{n_1}\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_1}$$

به طوری که نخستین جملهٔ این معادله برای هر dn_1 حذف می‌شود، یعنی:

$$\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_1}=\lambda n_1. \tag{IV}$$

حال dn_2 و dn_3 اختیاری است، بنابراین:

$$\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_2}=\lambda n_2. \tag{V}$$

$$\frac{\partial(T_s^2)}{\partial n_3}=\lambda n_3. \tag{VI}$$

از معادلات (IV)، (V)، (VI) و (II) مقادیر n_1، n_2، n_3 و λ را که مربوط به مقدار پایدار T_s^2 می‌باشند،

18 - multiplier

محاسبه می‌کنیم.

با محاسبه مشتقات جزئی از معادله (۴ـ ۱۰) معادلات (IV)، (V)، (VI) و (II) چنین می‌شوند:

$$2n_1[T_1^2-2(T_1n_1^2+T_2n_2^2+T_3n_3^2)T_1]=n_1\lambda, \qquad \text{(الف)}$$

$$2n_2[T_2^2-2(T_1n_1^2+T_2n_2^2+T_3n_3^2)T_2]=n_2\lambda, \qquad \text{(ب)}$$

$$2n_3[T_3^2-2(T_1n_1^2+T_2n_2^2+T_3n_3^2)T_3]=n_3\lambda, \qquad \text{(پ)}$$

و

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \qquad \text{(ت)}$$

از معادلات (الف)، (ب) ، (پ) و (ت) نقاط پایدار زیر (n_1, n_2, n_3) به دست می‌آیند:

$$(1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \qquad \text{(ث)}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad \text{(ج)}$$

صفحات به دست آمده از حل (ث) چیزی نیستند جز صفحات اصلی که روی آنها $T_s=0$.

بنابراین، روی این صفحات، مقدار T_s^2 حداقل است (در حقیقت صفراست).

مقادیر T_s^2 روی صفحات داده شده، با حل (ج) به سادگی از معادله (۴ـ ۱۰) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 \ \text{برای}\ , \quad T_s^2=\frac{(T_1-T_2)^2}{4}, \qquad \text{(۴-۱۱ الف)}$$

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3 \ \text{برای}\ , \quad T_s^2=\frac{(T_1-T_3)^2}{4}, \qquad \text{(۴-۱۱ ب)}$$

و

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3 \ \text{برای}\ , \quad T_s^2=\frac{(T_2-T_3)^2}{4}. \qquad \text{(۴-۱۱ پ)}$$

بنابراین، مقدار تنش برشی حداکثر، بزرگترین سه مقدار زیر است:

$$\frac{|T_1-T_2|}{2},\quad \frac{|T_1-T_3|}{2}, \quad \text{و} \quad \frac{|T_2-T_3|}{2}.$$

به عبارت دیگر:

$$(T_s)_{\max} = \frac{(T_n)_{\max} - (T_n)_{\min}}{2}. \qquad (۱۲-۴)$$

همچنین می‌توان نشان داد که روی صفحه تنش برشی حداکثر، تنش عمودی عبارت است از:

$$T_n = [(T_n)_{\max} + (T_n)_{\min}]/2.$$

مثال ۴-۴

اگر وضعیت تنش به گونه‌ای باشد که مولفه‌های T_{13}، T_{23}، T_{33} برابر صفر باشند، به آن، حالت تنش صفحه‌ای گویند.

(الف) برای تنش صفحه‌ای، مقادیر اصلی و جهات اصلی متناظر را بیابید.

(ب) تنش برشی حداکثر را محاسبه کنید.

حل: (الف) برای ماتریس تنش

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

معادله مشخصه زیر را داریم:

$$\lambda[\lambda^2 - (T_{11} + T_{22})\lambda + (T_{11}T_{22} - T_{12}^2)] = 0.$$

بنابراین $\lambda=0$ یک مقدار ویژه بوده، واضح است که جهت آن $\mathbf{n}=\mathbf{e}_3$ می‌باشد. مقادیر ویژه باقی مانده عبارت اند از:

$$\left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix}\right\} = \frac{T_{11} + T_{22} \pm \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}{2}. \qquad (۱۳-۴)$$

برای یافتن بردارهای ویژه متناظر، $(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0$ قرار داده، برای هر T_2 یا $\lambda=T_1$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 &= 0, \\ T_{12}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 &= 0, \\ -\lambda n_3 &= 0. \end{aligned}$$

از معادله سوم داریم: $n_3=0$. فرض کنید که بردار ویژه $\mathbf{n}=\cos\theta\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2$ (شکل ۴-۷ را ببینید) باشد. آن گاه از نخستین معادله داریم:

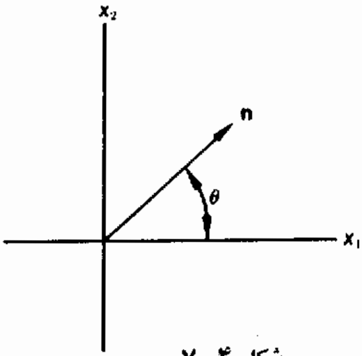
$$\tan\theta = \frac{n_2}{n_1} = -\frac{T_{11} - \lambda}{T_{12}}. \qquad (۱۴-۴)$$

(ب) چون سومین مقدار ویژه همواره صفر است، تنش برشی حداکثر، بزرگترینِ مقادیر زیر خواهد بود

$$|T_1/2|, \quad |T_2/2|$$

و

$$\left|\frac{T_1-T_2}{2}\right|=\frac{\sqrt{(T_{11}-T_{22})^2+4T_{12}^2}}{2}. \qquad (۱۵-۴)$$



شکل ۴-۷

مثال ۴-۵

مثال ۴-۴ را برای حالت تنش زیر انجام دهید: $T_{12}=T_{21}=1000psi$، تمامی مولفه‌های دیگر T_{ij} صفر هستند.

حل: از معادله (۴-۱۳) داریم:

$$\left.\begin{matrix}T_1\\T_2\end{matrix}\right\}=\pm\frac{\sqrt{(4)\,(1000)^2}}{2}=\pm 1000 \text{ psi.}$$

متناظر با تنش عمودی حداکثر $T_1=1000psi$، معادله (۴-۱۴) می‌دهد:

$$\tan\theta_1=-\frac{0-1000}{1000}=+1, \quad \text{i.e.,} \quad \theta_1=45°$$

و متناظر با تنش عمودی حداقل $T_2=-1000psi$ (یعنی تنش فشاری حداکثر):

$$\tan\theta_2=-\frac{0-(-1000)}{1000}=-1, \quad \text{i.e.,} \quad \theta_2=-45°.$$

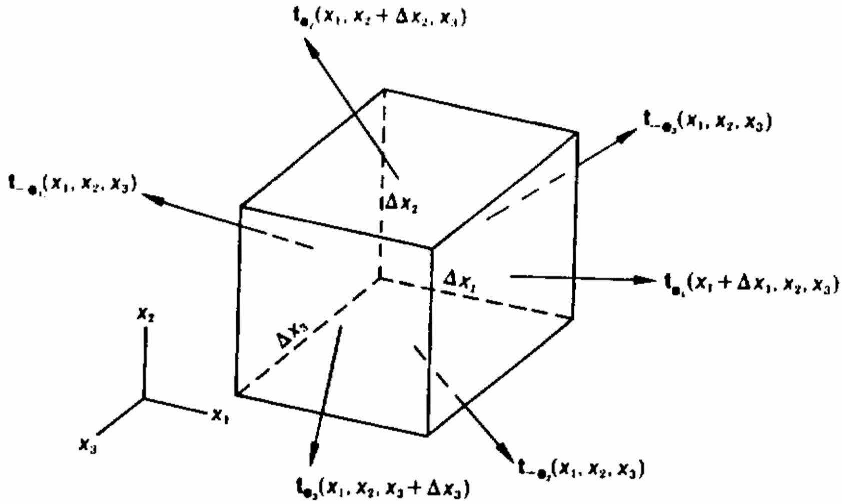
تنش برشی حداکثر بدین صورت داده می‌شود:

$$(T_s)_{max}=\frac{1000-(-1000)}{2}=1000 \text{ psi,}$$

و روی صفحاتی وارد می‌شود که صفحاتِ عمودی حداکثر و حداقل را به دو نیمه تقسیم می‌کند (یعنی صفحه e_1 و صفحه e_2 در این مسئله).

۴-۷ - معادلات حرکت - اصل اندازه حرکت خطی

در این بخش، معادلات دیفرانسیل حرکت برای هر محیط پیوسته در حال جنبش را استخراج می‌کنیم. اصل مفروض اساسی، این است که هر ذرهٔ محیط پیوسته، باید قانون حرکت نیوتن را ارضا کند. شکل ۴ - ۸ بردارهای تنش وارده روی شش وجه یک المان مکعب مستطیلی (که از محیط پیوسته در مجاورت موقعیت x_i منفک شده است) را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۸

فرض کنید $\mathbf{B}=B_i\mathbf{e}_i$ نیروی حجمی بر واحد جرم (نظیر وزن)، ρ چگالی جرمی در x_i، $\mathbf{a}$ شتاب ذره‌ای که در موقعیت x_i واقع شده، باشند. آن‌گاه قانون دوم نیوتن شکل زیر را که در دستگاه مختصات دکارتی معتبر است، خواهد داشت:

$$\left[\left(\frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3)-\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3)-\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3)-\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3}\right)\right]\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3+\rho\mathbf{B}\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$$
$$=(\rho\mathbf{a})(\Delta x_1)(\Delta x_2)(\Delta x_3).$$

با تقسیم دو طرف بر $\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ و فرض $\Delta x_i\longrightarrow 0$، داریم:

$$\frac{\partial\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}}{\partial x_3}+\rho\mathbf{B}=\rho\mathbf{a}.$$

چون: $\mathbf{te}_i=\mathbf{Te}_i=\mathbf{T}_{ij}\mathbf{e}_i$، بنابراین داریم (توجه شود که $\mathbf{e}_i$ جهات ثابت می‌باشند):

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i+\rho B_i\mathbf{e}_i=\rho a_i\mathbf{e}_i.$$

معادله‌فوق را به شکل پایا می‌توان نوشت:

(۴-۱۶ الف)* $$\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{B}=\rho\mathbf{a}$$

و به شکل مولفه‌ای

(۴-۱۶ ب) $$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho B_i=\rho a_i.$$

اینها معادلاتی هستند که باید توسط هر محیط پیوسته در حال حرکت - خواه جامد و خواه سیال - ارضا شوند و به آنها "معادلات حرکت کوشی" گفته می‌شوند. اگر شتاب حذف شود، آن گاه: معادله (۴-۱۶) به معادلات تعادل [۲۰] تبدیل می‌شود:

(۴-۱۷ الف) $$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho B_i=0.$$

یا به شکل پایا

(۴-۱۷ ب) $$\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{B}=0.$$

مثال ۴-۶

در غیاب نیروهای حجمی، آیا توزیع تنش زیر

$$T_{11}=x_2^2+\nu(x_1^2-x_2^2),\quad T_{12}=-2\nu x_1x_2,$$
$$T_{22}=x_1^2+\nu(x_2^2-x_1^2),\quad T_{23}=T_{13}=0,$$
$$T_{33}=\nu(x_1^2+x_2^2)$$

معادلات تعادل را ارضا می‌کند.

حل: نخستین معادله تعادل ($i=1$) را می‌نویسیم:

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j}=\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}=2\nu x_1-2\nu x_1+0=0.$$

---

* طبق تعریف، $div\mathbf{T}$ برداری است که مولفه‌های دکارتی آن عبارت است از $\partial T_{ij}/\partial x_j$ (بخش ۲ ب ۲۰ را ببینید)

20- equilibrium equations

به طور مشابه برای $i=2$:
$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = -2\nu x_2 + 2\nu x_2 + 0 = 0$$

و برای $i=3$:
$$\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = 0+0+0 = 0.$$

بنابراین، توزیع تنش داده شده ، معادلات تعادل را ارضا می‌کند.

مثال ۴-۷

چنان چه مولفه‌های تنش، دارای شکل $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ باشند، که در آن، $p=p(x_1,x_2,x_3,t)$ است، معادلات حرکت را بنویسید.

حل: با جایگزینی توزیع تنش داده شده در نخستین جمله طرف چپ معادله (۴-۱۶) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

بنابراین:
$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho a_i$$

یا
$$-\nabla p + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a}.$$

۴-۸ - شرط مرزی برای تانسور تنش

اگر روی مرز حقیقی جسمی، نیروهای گسترده وارد شوند، آنها را نیروها یا اثرهای سطحی[21] می‌نامیم. اینک در پی یافتن رابطه‌ای بین اثرهای سطحی و میدان تنشی (که در داخل جسم تعریف می‌شود) هستیم.

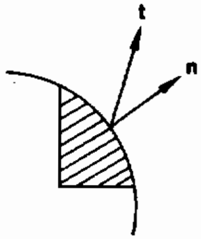
اگر یک چهاروجهی[22] بی‌نهایت کوچک بریده شده از مرز جسم را در نظر بگیریم که وجه مورب آن با سطح مرزی منطبق باشد (شکل ۴-۹)، آن گاه مثل بخش (۴-۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}, \qquad (۱۸-۴)$$

که $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر مرز، $\mathbf{T}$ تانسور تنش در مرز و $\mathbf{t}$ بردار نیرو بر واحد سطح - از اثر سطحی است. معادله (۴-۱۸)شرط مرزی تنش گفته می‌شود.

21- surface tractions

22- tetrahedron



شکل ۴-۹

مسائل

۴-۱ - حالت تنش در یک نقطه از جسمی به صورت زیر داده شده است:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

محاسبه کنید که روی کدامیک از سه صفحه مختصات (عمودهای e_1، e_2، e_3) (الف) تنش عمودی، و (ب) تنش برشی، حداکثر است.

۴-۲ - حالت تنش در یک نقطه از جسمی عبارت است از:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(الف) بردار تنش را در یک نقطه، روی صفحه‌ای که عمود آن در جهت $2e_1+2e_2+e_3$ واقع است، پیدا کنید.

(ب) مقدار تنش عمودی و برشی را روی این صفحه به دست آورید.

۴-۳ - مسئله قبل را برای صفحهٔ موازی با صفحه $x_1-2x_2+3x_3=4$ انجام دهید.

۴-۴ - توزیع تنش در یک جسم مشخص، به صورت زیر داده شده است:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بردار تنش وارده روی صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2, 3)$ گذشته و بر سطح استوانه‌ای مدور $x_1^2+x_2^2=1$ دراین نقطه مماس باشد.

۴ـ۵ ـ برای حالت تنش زیر

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 10 & 50 & -50 \\ 50 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

مقادیر T'_{11} و T'_{13} را بیابید، که x'_1 در جهت $\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$ و x'_2 در جهت $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ واقع شده‌اند.

۴ـ۶ ـ توزیع تنش زیررا در نظر بگیرید

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \alpha x_2 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

که در آن، α و β ثابت می‌باشند.

(الف) توزیع بردار تنش وارده روی مربعی در صفحه $x_1=0$ که رئوس آن در (۰،۱،۱)، (۰،۱،۱ـ)، (۰،۱ـ،۱) و (۰،۱ـ،۱ـ) واقع شده‌اند را محاسبه کرده و شکل آن را رسم نمایید.

(ب) برآیند کل نیرو و ممان بردارهای تنش وارده روی مربع بند (الف) را حول مبدأ به دست آورید.

۴ـ۷ ـ مسئله قبل را اگر توزیع تنش به صورت زیر داده شده باشد، انجام دهید

$$T_{11} = \alpha x_2^2$$

و مولفه‌های دیگر $T_{ij}=0$ هستند.

۴ـ۸ ـ مسئله ۴ـ۶ را برای توزیع تنش زیر انجام دهید:

$$T_{11} = \alpha, \quad T_{21} = T_{12} = \alpha x_3$$

تمام مولفه‌های دیگر $T_{ij}=0$ می‌باشند.

۴ـ۹ ـ توزیع تنش زیر را برای یک میله استوانه‌ای مدور و مشخص در نظر بگیرید:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x_3 & +\alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(الف) توزیع بردار تنش روی سطوحی که توسط $x_2^2+x_3^2=4$، $x_1=0$ و $x_1=l$ تعریف شده‌اند، چقدر می‌باشد؟

(ب) برآیند کل نیرو و ممان روی صفحه انتهایی $x_1=l$ را پیدا کنید.

۴-۱۰ - برای هر حالت تنش $\mathbf{T}$، تنش انحرافی[۲۳] (یا تنش کاهیده-م) $\mathbf{T}^{\circ}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{T}^{\circ} = \mathbf{T} - \left(\frac{T_{kk}}{3}\right)\mathbf{I}.$$

که T_{kk} نخستین پایای تانسور تنش $\mathbf{T}$ می‌باشد.

(الف) نشان دهید که اولین پایای تنش انحرافی حذف می‌شود (صفر می‌شود).

(ب) تانسور تنش زیر داده شده است

$$[\mathbf{T}] = 100\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{kPa},$$

$\mathbf{T}^{\circ}$ را محاسبه کنید.

(پ) نشان دهید که جهات اصلی تنش و تنش انحرافی بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

(ت) رابطه‌ای بین مقادیر اصلی تنش و تنش انحرافی پیدا کنید.

۴-۱۱ - صفحه تنش اکتاهدرال (هشت وجهی)[۲۴] بدین گونه تعریف می‌شود که: زوایای مساوی با هریک از محورهای اصلی تنش می‌سازد.

(الف) چند صفحه اکتاهدرال مستقل در هر نقطه وجود دارند؟

(ب) نشان دهید که تنش عمودی روی صفحه اکتاهدرال، توسط یک سوم نخستین پایای تنش داده می‌شود.

(پ) نشان دهید که تنش برشی روی صفحه اکتاهدرال، توسط یک سوم نخستین پایای تنش داده می‌شود:

$$T_s = \tfrac{1}{3}\left[(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_1 - T_3)^2\right]^{1/2},$$

که در آن، T_1، T_2، T_3 مقادیر اصلی تانسور تنش می‌باشند.

۴-۱۲ - (الف) فرض شود که $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ دو بردار یکه باشند که صفحات M و N را (که از نقطه p می‌گذرند) تعریف می‌کنند. برای یک حالت اختیاری تنش (و تعریف شده در نقطه p) نشان دهید که مولفه بردار تنش $\mathbf{t_m}$ در جهت $\mathbf{n}$، برابر است با مولفه بردار تنش $\mathbf{t_n}$ در جهت $\mathbf{m}$.

---

23 - deviatoric stress

24 - octahedral stress plane

(ب) اگر $\mathbf{m}=\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{n}=\mathbf{e}_2$ باشند، نتیجه بند (الف) به چه چیزی تقلیل می‌یابد؟

۴-۱۳ - فرض کنید که $\mathbf{m}$ بردار یکه‌ای باشد که صفحه M را (که از نقطه p می‌گذرد) تعریف می‌کند. نشان دهید که بردار تنش روی هر صفحهٔ شامل بردار تنش $\mathbf{t_m}$، در صفحه M واقع است.

۴-۱۴ - فرض کنید $\mathbf{t_m}$ و $\mathbf{t_n}$ بردارهای تنش روی صفحاتی با بردارهای یکهٔ $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ گذرنده از نقطه p باشند. نشان دهید که اگر $\mathbf{k}$ بردار یکهٔ صفحه شامل $\mathbf{t_m}$ و $\mathbf{t_n}$ باشد، $\mathbf{t_k}$ عمود بر $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ خواهد بود.

۴-۱۵ - چرا دو ماتریس زیر نمی‌توانند یک تانسور تنش واحد را نمایش دهند؟

$$\begin{bmatrix} 100 & 200 & 40 \\ 200 & 0 & -30 \\ 40 & -30 & -50 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 40 & 100 & 60 \\ 100 & 100 & 0 \\ 60 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

۴-۱۶ - مقادیر اصلی تانسور تنش $\mathbf{T}$ عبارت اند از $T_1=10Mpa$، $T_2=-10Mpa$ و $T_3=30Mpa$. اگر ماتریسی از تنش، به صورت زیر داده شود:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & T_{33} \end{bmatrix} \times 10 \text{ MPa}$$

مقدار T_{11} و T_{33} را بیابید.

۴-۱۷ - اگر حالت تنش در یک نقطه عبارت باشد از:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{kPa}$$

مطلوب است (الف) مقدار تنش برشی روی صفحه‌ای که عمود آن در جهت $2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ واقع است، و (ب) تنش برشی حداکثر.

۴-۱۸ - به حالتی از تنش که در آن، تنها مولفه‌های غیر صفر، یک جفت تنش برشی می‌باشد، برش ساده گفته می‌شود. فرض کنید $T_{12}=T_{21}=\tau$ و تمام مولفه‌های دیگر $T_{ij}=0$ هستند،

(الف) مقادیر اصلی و جهات اصلی را برای این حالت تنش بیابید.

(ب) تنش برشی حداکثر و صفحه‌ای که این تنش روی آن وارد می‌شود، را به دست آورید.

۴-۱۹ - حالت تنش که در آن، فقط مولفه‌های عمودی تنش مخالف صفر هستند، تنش عمودی سه محوری خوانده می‌شود. فرض شود $T_{11}=\sigma_1$، $T_{22}=\sigma_2$، $T_{33}=\sigma_3$، با $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ و بقیه مولفه‌ها

$T_{ij}=0$ هستند. تنش برشی حداکثر و صفحه‌ای که این تنش روی آن وارد می‌شود، را پیدا کنید.

۴-۲۰ - نشان دهید که اگر گشتاورهای حجمی[۲۵] بر واحد حجم وجود داشته باشند، (نظیر حالت یک جامدی دی الکتریک ناهمسانگرد قطبی شده) تقارن تانسور تنش معتبر نیست.

۴-۲۱ - توزیع تنش زیر داده شده است

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & T_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1,x_2) & x_1-2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

T_{12} رابیابید به طوری که توزیع تنش درتعادل با نیروی حجمی صفر باشد، و بردار تنش روی $x_1=1$ به صورت $\mathbf{t}=(1+x_2)\mathbf{e}_1+(5-x_2)\mathbf{e}_2$ داده شود.

۴-۲۲ - فرض کنید که بردار نیروی حجمی $\mathbf{B}=-g\mathbf{e}_3$ باشد، که در آن، g ثابت است. تانسور تنش زیر را در نظر بگیرید

$$[\mathbf{T}] = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & T_{33} \end{bmatrix}.$$

عبارتی برای T_{33} بیابید به گونه‌ای که $\mathbf{T}$ معادلات تعادل را ارضا نماید.

۴-۲۳ - در غیاب نیروهای حجمی، آیا مولفه‌های تنش زیر

$$T_{11} = \alpha[x_2^2+\nu(x_1^2-x_2^2)], \quad T_{22} = \alpha[x_1^2+\nu(x_2^2-x_1^2)],$$

$$T_{33}=\alpha\nu(x_1^2+x_2^2), \quad T_{12} = -2\alpha\nu x_1x_2 \qquad T_{13} = T_{23} = 0.$$

معادلات تعادل را راضا می‌کنند؟

۴-۲۴ - مسئله ۴-۲۳ را برای توزیع تنش زیر تکرار کنید.

$$[\mathbf{T}] = \alpha \begin{bmatrix} x_1+x_2 & 2x_1-x_2 & 0 \\ 2x_1-x_2 & x_1-3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}.$$

25 - body moments

۴-۲۵ - اگر توزیع تنش شکل زیر را داشته باشد (به آن تنش صفحه‌ای گویند)

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} T_{11}(x_1, x_2) & T_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1, x_2) & T_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(الف) معادلات تعادل در این حالت خاص چگونه است؟

(ب) اگر تابع $\phi = (x_1, x_2)$ به گونه‌ای معرفی شود که

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2},$$

آیا با این توزیع تنش، در غیاب نیروی حجمی، تعادل برقرار خواهد بود.

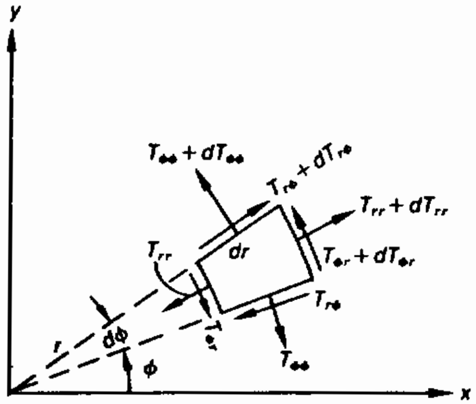
۴-۲۶ - در مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) یک المان حجم‌مادی را که توسط سه‌جفت وجه $r = r_\circ$، $r = r_\circ + dr$، $\phi = \phi_\circ$، $\phi = \phi_\circ + d\phi$، $z = z_\circ$، $z = z_\circ + dz$ محدوده شده، در نظر بگیرید.

معادلات حرکت زیر را در مختصات استوانه‌ای استخراج کنید:

$$\rho a_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \rho B_r,$$

$$\rho a_\phi = \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial T_{\phi\phi}}{r\partial \phi} + \frac{2T_{r\phi}}{r} + \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial z} + \rho B_\phi.$$

$$\rho a_z = \frac{\partial (rT_{rz})}{r\partial r} + \frac{\partial T_{\phi z}}{r\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho B_z.$$



شکل ۴-۱

فصل ۵

جامد الاستیک خطی

تاکنون سینماتیک تغییر شکل، توصیف حالت تنش و سه اصل اساسی فیزیک محیطهای پیوسته : اصل بقای جرم [معادله (۳ - ۲۹)]، اصل اندازه حرکت خطی [معادله (۴ - ۱۶)]، و اصل ممان اندازه حرکت [معادله (۴ - ۵)] را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. تمامی این روابط،* برای هر محیط پیوسته معتبر است، علاوه بر این، در استخراج روابط، به هیچ ماده خاصی اشاره نشد.

به هر حال، این معادلات برای توصیف واکنش یک ماده خاص در برابر بارهای وارده، کافی نمی‌باشند. به تجربه در یافته‌ایم که تحت شرایط بارگذاری واحد، واکنش فولاد، با آب متفاوت است. به علاوه برای یک ماده مشخص، این واکنش نسبت به شرایط متفاوت بارگذاری، متغیر خواهد بود. به عنوان مثال، برای بارگذاریهای نسبتاً کم، تغییر شکل ایجاد شده در فولاد تحت بار، با حذف بار از بین خواهد رفت. این وجه از رفتار ماده، به عنوان الاستیسیته یا حالت ارتجاعی شناخته می‌شود. حال آن که فراتر از بارگذاری مشخص، تغییر شکلهای دائم و یا حتی شکست وجود دارد که نشانگر رفتاری کاملا متفاوت از رفتار الاستیک می‌باشد. در این فصل، یک ماده ایده‌آل (که رفتار الاستیک خطی یک جسم جامد واقعی را مدل کند) را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. چنین ماده ایده‌آلی، توسط یک رابطه خطی

---

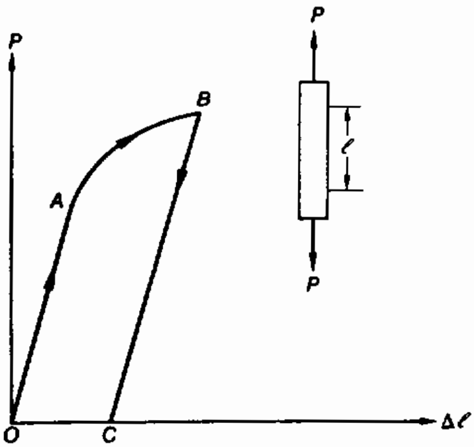
* اصل بقای انرژی، در فصل ۶ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تنش - کرنش توصیف می‌شود (یا کلی‌تر معادله بنیادین برای جامد الاستیک خطی). آن‌گاه با استفاده از معادله بنیادین، برخی از مسائل استاتیکی و دینامیکی چنین جامدی را مطالعه می‌کنیم.

۵-۱ - خواص مکانیکی

در این بخش، در پی دست‌یابی به نوعی فهم و احساس از خواص مکانیکی مواد جامد می‌باشیم. برای این منظور، برخی آزمایشهای ذهنی که مبتنی بر تجربیات آزمایشگاهی مدل شده، ترتیب می‌دهیم.

فرض کنید از جسمی که در اختیار داریم، یک نمونه استوانه‌ای باریک به مساحت سطح مقطع A ببریم. حال، میله، با نیروی محوری P و به صورت استاتیکی تحت کشش قرار می‌گیرد، و افزایش طول Δl روی طول l اندازه‌گیری می‌شود. یک نمونه از نمودار نیروی کششی در برابر تغییر طول، در شکل ۵ - ۱ نشان داده شده است. اگر بار وارده، در امتداد قسمت خطی OA (گاه بازه تناسب خوانده می‌شود) ، برداشته می‌شد، آن‌گاه خط OA به مبدأ باز می‌گشت و نمونه، یک حالت ارتجاعی از خود نشان می‌داد. اعمال باری بزرگتر از A و سپس برداشتن آن، منجر به عبور از مسیر $OABC$ می‌شود و در می‌یابیم که یک "افزایش طول دائمی" OC وجود دارد. اعمال مجدد بار، از C، مبین رفتار الاستیک با شیبی نظیر OA (اما با یک تناسب افزایش یافته) می‌باشد. در این صورت گفته می‌شود که ماده سخت - کاری یا (سردکاری) شده است.



شکل ۵-۱

چون به طور کلی، سازه‌ها و ماشینها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که رفتار الاستیک داشته باشند و نیز از آن جاکه رفتار الاستیک مواد، یکی از ساده‌ترین رفتارها برای مدل کردن است، خود را به الاستیسیته خطی محدود و مقید خواهیم ساخت. با مقید ساختن خود به حوزه خطی، در می‌یابیم که اگر نمونه‌ای تحت نرخهای بارگذاری متفاوتی کشیده شود، نسبت واحدی بین نیرو و تغییر طول وجود خواهد داشت. از این رو می‌توان قانع شد که نرخ بارگذاری، هیچگونه اثری روی رفتار الاستیک خطی ندارد.

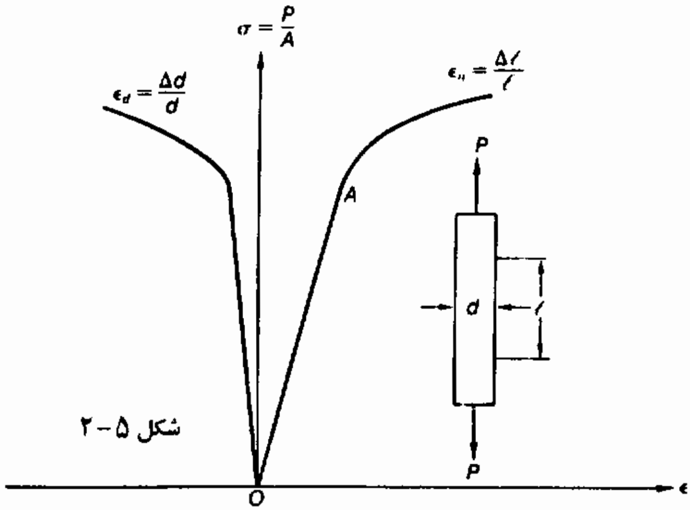
نمودار بار - افزایش طول، در شکل ۵-۱ وابسته به سطح مقطع نمونه و طول اندازه‌گیری l می‌باشد. به هر حال ما نیازمند نمایش رفتار ماده به گونه‌ای هستیم که مستقل از ابعاد نمونه (و هر متغیری که توسط انجام آزمایش معرفی می‌شود) باشد. از این رو آن چه را که تنش نامیده می‌شود $\frac{P}{A}$، در برابر کرنش محوری یا تغییر طول واحد $\varepsilon_a=\Delta l/l$ (به صورتی که در شکل ۵-۲ نشان داده شده) رسم می‌نماییم. حال، نتایج آزمایش به شکلی که وابسته به ابعاد نمونه نیست، ظاهر می‌شود. شیب خط OA که یک ضریب ماده خواهد بود، مدول یانگ (یامدول الاستیسیته) نامیده می‌شود.

$$E_Y = \sigma/\epsilon_a.$$

مقدار عددی E_Y برای فولاد حدود $207Gpa(30\times10^6psi)$ می‌باشد. این بدین معنی است که برای یک میله فولادی به مساحت سطح مقطع $32/3^{cm^2}(5in^2)$ که بار $667.200N(150000lbs)$ را تحمل می‌کند، کرنش محوری برابر است با

$$\epsilon_a = \frac{667,200/(32.3 \times 10^{-4})}{207 \times 10^9} \approx 10^{-3}.$$

همان گونه که انتظار می‌رفت، کرنشها در ناحیه الاستیک فلزات کاملا کوچک است. بنابراین نظریه کرنش بی‌نهایت کوچک را برای توصیف تغییر شکل فلزات به کار می‌بریم.



شکل ۵-۲

در آزمایش کشش، همچنین می‌توان تغییرات در بعد جانبی را نیز اندازه گرفت.

اگر میله یک استوانه مدور به قطر d بود، تحت شرایط خاص، با افزایش بار می‌توانست در عین کاهش در قطر، مدور بماند. فرض شود که ε_d کرنش جانبی باشد (که برابر $\Delta d/d$ است)، در می‌یابیم که نسبت $-\varepsilon_d/\varepsilon_a$ ثابت است. این ثابت راضریب پواسون خوانده، با ν نمایش می‌دهیم. یک مقدار نمونه‌ای ν برای فولاد ۰/۳ است.

تاکنون تنها یک نمونه تک بریده شده از یک قطعه ماده را لحاظ کرده‌ایم. قابل تصور است که مدول الاستیسیته E_Y و همچنین ضریب پواسون، ممکن است وابسته به جهت نمونه - نسبت به قطعه - باشند. در این حالت گفته می‌شود که ماده نسبت به خواص الاستیک خود ناهمسانگرد[2] می‌باشد. معمولاً خواص ناهمسانگردی، توسط موادی با یک ساختمان درونی معین نظیر چوب یا ورق فولادی غلطک کاری شده، نمایش داده می‌شود. حال اگر نمونه‌ها در جهات مختلف - ولی در مجاورت یکدیگر - بریده شده و همگی نمودار σ-ε یکسان داشته باشند،می‌توان نتیجه گرفت که ماده نسبت به خواص الاستیک خود همسانگرد[3] است.

---

2 - anisotropic

3 - isotropic

علاوه بر امکان وابستگی خواص الاستیک به جهت، ممکن است که از یک محل به محل مجاور نیز تغییر نمایند. در این حالت ، ماده را ناهمگن [۴] می‌نامیم. اگر تغییری در خواص مکانیکی حاصله از نتایج آزمایش - برای نمونه‌ها در نقاط مختلف - وجود نداشته باشد، گوییم که ماده همگن [۵] است.

قبلا فرض شد که میله با سطح مقطع مدور در خلال تغییر شکل مدور باقی می‌ماند. این فرض، تنها زمانی صحیح است که ماده میله نسبت به خواص الاستیک خود همگن و همسانگرد باشد.

آزمایشات مشخصه دیگر، با یک ماده الاستیک نیز امکان پذیر است. در یک حالت، ممکن است به تغییر حجم یک قطعه با ماده همگن و همسانگرد - تحت فشار یکنواخت P - علاقه مند باشیم. حالت تنش آن عبارت است از:

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij}.$$

در یک آزمایش تجربی مناسب، رابطه بین P، فشار وارده و e، تغییر حجم بر حجم اولیه را اندازه گیری می‌کنیم. برای ماده الاستیک، یک رابطه خطی به دست می‌آید، و مدول حجمی [۶] k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{-p}{e}.$$

یک مقدار نمونه‌ای k برای فولاد برابر $138Gpa(20\times10^6 psi)$ می‌باشد.

آزمایش پیچش، ثابت الاستیک دیگری را به دست می‌دهد. میله استوانه‌ای با سطح مقطع دایروی به شعاع r، در معرض ممان پیچشی M_t در امتداد محور استوانه قرار می‌گیرد. طول میله l بوده و به اندازه زاویه θ (به خاطر اعمال ممان M_t) خواهد پیچید.* برای یک ماده الاستیک ، یک رابطه خطی بین زاویه پیچش θ و ممان اعمال شده به دست می‌آید. مدول برشی μ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mu = \frac{M_t l}{I_p \theta},$$

که در آن، $I_p=\pi r^4/2$ (ممان اینرسی قطبی سطح) می‌باشد.

یک نمونهٔ مقدار μ برای فولاد برابر $76Gpa(11\times10^6 psi)$ است.

4 - inhomogeneous

5 - homogeneous

6 - bulk modulus

* بحث بیشتر پیچش میله استوانه‌ای بعداً در این فصل ارائه می‌شود، بخش ۵ - ۸ ب را ببینید.

چهار ثابت متفاوت - به کمک سه آزمایش مختلف - برای ماده الاستیک خطی همسانگرد معرفی شد. هنوز نمی‌دانیم که آیا این ثابتها مستقل‌اند یا خیر و یا چه تعداد ثابت برای توصیف یک ماده الاستیک خطی مورد نیاز است.

۵-۲ - جامد الاستیک خطی

آزمایشهای بیان شده در بخش ۵ - ۱ ، در چهار چوب محدودیتهای مشخص، وجوه مشترک زیر را دارا بودند:

(الف) رابطه بین نیروی وارده و کمیتی که تغییر شکل را اندازه می‌گرفت، خطی بود.

ب() نرخ اعمال نیرو ، در رابطه خطی بند (الف) اثری نداشت.

(پ) با برداشتن بار وارده، تغییر شکلهای واقع شده کاملا از بین می‌رفتند.

(ت) تغییر شکلهایی که در آزمایشات مشاهده شد، بسیار کوچک بودند.

اینک مشخصات (الف) تا (ت) را برای فرمول بندی معادله بنیادین، تنش را به کمیتهای مناسب تغییر شکل مرتبط می‌سازد. در این حالت، تغییر شکلها کوچک بوده، نرخ اعمال بار هیچ اثری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}), \qquad (۱-۵)$$

که $\mathbf{T}(\mathbf{E})$ یک تابع تک مقدار $\mathbf{E}$ با $\mathbf{T}(\mathbf{O})=\mathbf{O}$ می‌باشد. اگر علاوه بر این، تابع خطی باشد، آن‌گاه به شکل مولفه‌ای خواهیم داشت:

$$T_{11} = C_{1111}E_{11} + C_{1112}E_{12} + \cdots + C_{1133}E_{33}$$

$$T_{12} = C_{1211}E_{11} + C_{1212}E_{12} + \cdots + C_{1233}E_{33}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{33} = C_{3311}E_{11} + C_{3312}E_{12} + \cdots + C_{3333}E_{33}$$

نه معادله فوق را بدین صورت می‌توان نوشت:

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}. \qquad (۲-۵)$$

چون T_{ij} و E_{ij} مولفه‌های تانسور مرتبه دو می‌باشند، از مثال ۲ - ۸ نتیجه می‌شود که C_{ijkl} مولفه‌های

یک تانسور مرتبه چهار خواهد بود. این کمیت به عنوان تانسور الاستیسیته[8] شناخته می‌شود. این تانسور است که خواص مکانیکی نمایش داده شده توسط جامد الاستیک هوکی ناهمسانگرد را مشخص می‌کند. ناهمسانگردی ماده، از آن جا مشخص می‌شود که مولفه‌های C_{ijkl} به طور کلی برای مبناهای مختلف (همان‌گونه که در مثال ۲-۸، دیده شد) متفاوت هستند. اگر جسم همگن باشد، یعنی خواص مکانیکی برای هر ذره در جسم یکسان باشند، آن‌گاه C_{ijkl} ثابت (یعنی مستقل از موقعیت) خواهد بود. بعد از این، فقط با اجسام همگن سروکار خواهیم داشت.

تانسور $\mathbf{E}$ متقارن است و ما فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که $\mathbf{T}$ متقارن است، لذا ۹ معادلهٔ فوق [معادلات (۵-۲)] به ۶ معادله تقلیل می‌یابند که شش مولفه مستقل تنش (T_{23}، T_{13}، T_{12}، T_{33}، T_{22}، T_{11}) را به شش مولفه مستقل کرنش (E_{23}، E_{13}، E_{12}، E_{33}، E_{22}، E_{11}) مربوط می‌سازند. بنابراین، برای یک جسم جامد الاستیک خطی ناهمسانگرد، ما به بیش از ۳۶ ثابت ماده - برای توصیف خواص مکانیکی آن - احتیاجی نداریم.

۵-۳ - جامد الاستیک خطی همسانگرد

به ماده‌ای همسانگرد گفته می‌شود که خواص مکانیکی آن را بدون توجه به جهت، بتوان توصیف نمود. هنگامی که این شرط برقرار نباشد، ماده ناهمسانگرد خوانده می‌شود. بسیاری از فلزات سازه‌ها نظیر فولاد و آلومینیم را می‌توان به عنوان همسانگرد -بدون ارتکاب خطای قابل ملاحظه‌ای - تلقی نمود.

برای جامد الاستیک خطی داشتیم: $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$.

اگر این همسانگرد باشد، آن‌گاه مولفه‌های تانسور الاستیسیته، یعنی C_{ijkl} باید یکسان (بدون وابستگی به تغییر محورهای مختصات) باقی بمانند. به عبارت دیگر

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} \tag{۵-۳}$$

تحت تمامی تبدیلات متعامد، پایا خواهد بود. تانسوری که دارای مولفه‌های یکسان - نسبت به هر یکه

8 - elasticity tensor

مبنای قائم باشد، به عنوان تانسور همسانگرد[9] شناخته می‌شود. به عنوان مثال، تانسور واحد I یک تانسور همسانگرد است، زیرا مولفه‌های آن δ_{ij} برای هر مبنای دکارتی یکسان است. واضح است که تانسورهای مرتبه چهار زیر همسانگرد می‌باشند: $A_{ijkl}\equiv\delta_{ij}\delta_{kl}$ ، $B_{ijkl}\equiv\delta_{ik}\delta_{jl}$ ، $H_{ijkl}\equiv\delta_{il}\delta_{jk}$.* در حقیقت می‌توان نشان داد که هر تانسور مرتبه چهار را می‌شود به صورت یک ترکیب خطی از سه تانسور فوق نمایش داد (از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم). بنابراین، برای یک ماده الاستیک خطی همسانگرد تانسور الاستیسیته C_{ijkl} را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}. \qquad (۵-۴)$$

با قرار دادن معادله (۵ - ۴) در معادله (۵ - ۲) و نیز چون

$$A_{ijkl}E_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}E_{kl} = \delta_{ij}E_{kk} = \delta_{ij}e,$$

$$B_{ijkl}E_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}E_{kl} = E_{ij},$$

$$H_{ijkl}E_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}E_{kl} = E_{ji} = E_{ij},$$

داریم:

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} = \lambda e\delta_{ij} + (\alpha+\beta)E_{ij}.$$

یا با نشان دادن $\alpha+\beta$ با 2μ، داریم:

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \qquad (\text{۵-۵ الف})$$

یا

$$\mathbf{T} = \lambda e\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \qquad (\text{۵-۵ ب})$$

که نخستین پایای عددی $e=E_{kk}=\mathrm{E}$. شکل بسط یافته معادله (۵ - ۵) چنین است:

$$T_{11} = \lambda(E_{11}+E_{22}+E_{33}) + 2\mu E_{11}, \qquad (\text{۵-٦ الف})$$

$$T_{22} = \lambda(E_{11}+E_{22}+E_{33}) + 2\mu E_{22}, \qquad (\text{۵-٦ ب})$$

$$T_{33} = \lambda(E_{11}+E_{22}+E_{33}) + 2\mu E_{33}, \qquad (\text{۵-٦ پ})$$

---

9 isotropic tensor

* توجه کنید که:

$$A_{1111}=1,\quad A_{1212}=0,\quad A_{1221}=0,$$
$$B_{1111}=1,\quad B_{1212}=1,\quad B_{1221}=0,$$
$$H_{1111}=1,\quad H_{1212}=0,\quad H_{1221}=1.$$

$$T_{12} = 2\mu E_{12}, \tag{۵-۶ت}$$

$$T_{13} = 2\mu E_{13}, \tag{۵-۶ث}$$

$$T_{23} = 2\mu E_{23}. \tag{۵-۶ج}$$

معادلات (۵-۵) معادلات بنیادین برای یک جسم جامد الاستیک خطی می‌باشند. دو ثابت ماده λ و μ به عنوان ثابتهای لامه [11] شناخته می‌شود. چون E_{ij} بدون بعد می‌باشد، بعد λ و μ نظیر تانسور تنش است، یعنی نیرو بر واحد سطح. برای یک ماده حقیقی داده شده، مقادیر ثابتهای لامه باید از آزمایشات مناسب تعیین شوند. بعداً در این باره بیشتر گفتگو خواهیم کرد.

مثال ۵-۱

اگر ماتریس کرنش زیر داده شده باشد، مولفه‌های تنش را بیابید:

$$[\mathbf{E}] = 10^{-6}\begin{bmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

این ماده فولاد بوده با $\lambda = 119.2Gpa(17.3 \times 10^6 psi)$ و $\mu = 79.2Gpa(11.5 \times 10^6 psi)$.

حل: با استفاده از قانون هوک $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda e \delta_{ij}$ نخست اتساع را محاسبه می‌کنیم $e = 100 \times 10^{-6}$. حال مولفه‌های تنش را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= 2\mu E_{11} + \lambda e = 1.67 \times 10^{-2}\,\text{GPa}, \\
T_{22} &= 2\mu E_{22} + \lambda e = 1.83 \times 10^{-2}\,\text{GPa}, \\
T_{33} &= 2\mu E_{33} + \lambda e = 1.67 \times 10^{-2}\,\text{GPa}, \\
T_{12} &= T_{21} = 2\mu E_{12} = 7.92 \times 10^{-2}\,\text{GPa}, \\
T_{13} &= T_{31} = 2\mu E_{13} = 3.17 \times 10^{-3}\,\text{GPa}, \\
T_{23} &= T_{32} = 0.
\end{aligned}$$

مثال ۵-۲

(الف) برای یک ماده هوکی همسانگرد، نشان دهید که جهات اصلی تنش و کرنش بر هم منطبق‌اند.

(ب) رابطه بین مقادیر اصلی تنش و کرنش را بیابید.

حل: (الف) فرض کنید $\mathbf{n}_1$ بردار یکه ویژه تانسور کرنش $\mathbf{E}$ (یعنی $\mathbf{E}\mathbf{n}_1 = E_1\mathbf{n}_1$) باشد. آنگاه از قانون هوک داریم:

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = 2\mu\mathbf{E}\mathbf{n}_1 + \lambda e\mathbf{I}\mathbf{n}_1 = (2\mu E_1 + \lambda e)\mathbf{n}_1. \tag{۱}$$

---

11 - Lame's Constants

بنابراین $\mathbf{n}_1$ بردار یکه ویژه تانسور $\mathbf{T}$ نیز می‌باشد.

(ب) فرض کنید E_1، E_2، E_3 مقادیر ویژه $\mathbf{E}$ باشند، پس $e=E_1+E_2+E_3$ و از معادله (۱) داریم

$$T_1 = 2\mu E_1 + \lambda(E_1+E_2+E_3).$$

و به طریق مشابه

$$T_2 = 2\mu E_2 + \lambda(E_1+E_2+E_3),$$
$$T_3 = 2\mu E_3 + \lambda(E_1+E_2+E_3).$$

مثال ۵-۳

برای یک ماده الاستیک همسانگرد

(الف) رابطه بین نخستین پایای تنش و کرنش را بیابید.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف)، قانون هوک را معکوس کرده، کرنش را به صورت تابعی از تنش به دست آورید.

حل: (الف) با جمع معادلات (۵-۶ الف، ب و پ) داریم:

$$T_{kk} = (2\mu+3\lambda)E_{kk} = (2\mu+3\lambda)e.$$

(ب) حال معادله (۵-۵ ب) را به صورت زیر معکوس می‌کنیم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu}e\mathbf{I} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda T_{kk}}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\mathbf{I}.$$

۵-۴ - مدول یانگ، ضریب پواسون، مدول برش، و مدول حجمی

معادله (۵-۶) مولفه‌های تنش را برحسب مولفه‌های کرنش به دست می‌دهد. این معادلات را نظیر مثال (۵-۳) می‌توان معکوس نمود، که نتیجه می‌دهد:

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(T_{kk})\delta_{ij}\right]. \tag{۵-۷ الف}$$

همچنین داریم

$$e = \left(\frac{1}{2\mu+3\lambda}\right)T_{kk}. \tag{۵-۷ ب}$$

چنان چه تنها یک مولفه تنش عمودی مخالف صفر باشد، حالت تنش را کشش تک محوری[12] (یا فشار) می‌نامیم. در حقیقت، این یک تقریب خوب بر حالت حقیقی تنش در میله استوانه‌ای (مورد استفاده در

12 uniaxial tension

آزمایش کشش و توصیف شده در بخش ۵ - ۱) می‌باشد.* به خصوص این که جهت e_1 را محور در نظر می‌گیریم و $T_{11} \neq 0$ است. در این حالت، معادله (۵ - ۱۷ الف) تبدیل می‌شود به

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu}\left[T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11}\right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11},$$

$$E_{33} = E_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11},$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0.$$

نسبت $\frac{T_{11}}{E_{11}}$ متناظر با نسبت $\frac{\sigma}{\varepsilon_a}$ است و از آزمایش کشش (بخش ۵ - ۱ را ببینید) داریم:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_a} = \frac{T_{11}}{E_{11}} = E_Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad (۵-۸)$$

که E_Y مدول یانگ[۱۴] یا مدول الاستیسیته است.

ضریب پواسون ν، که برابر منفی نسبت کرنش جانبی (E_{22}، E_{33}) به کرنش محوری است، برابر است با

$$-\frac{E_{33}}{E_{11}} = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = -\frac{\epsilon_d}{\epsilon_a}. \qquad (۵-۹)$$

با استفاده از معادلات (۵ - ۸) و (۵ - ۹)، معادله (۵ - ۷) را به شکلی که معمولاً در مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد، خواهیم نوشت:

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y}\left[T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})\right],$$

$$E_{22} = \frac{1}{E_Y}\left[T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})\right],$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_Y}\left[T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})\right],$$

$$E_{12} = \frac{1}{2\mu} T_{12}, \qquad (۵-۱۰)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2\mu} T_{13},$$

* برای بحث مفصلتر، بخش ۵ - ۱۸ الف را ببینید.

14 - Young's modulus

$$E_{23} = \frac{1}{2\mu} T_{23}.$$

هرچند که سه ثابت ماده در معادله (۵ - ۱۰) وجود ندارد، اما باید به خاطر داشت که تنها دو تای آنها برای ماده همسانگرد، مستقل هستند. در حقیقت، با حذف λ از معادلات (۵ - ۸) و (۵ - ۹) رابطه مفید زیر را خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{E_Y}{2(1+\nu)}. \qquad (۵-۱۱)$$

حالت دوم تنش، برش ساده[۱۵] گفته می‌شود و متناظر با حالتی است که در آن، تمامی مولفه‌های تنش به جز یک جفت از عناصر غیر قطری، حذف می‌شوند. به خصوص با انتخاب $T_{12} \neq T_{21} = 0$، معادله (۵ - ۷ الف) تبدیل می‌شود به:

$$E_{12} = E_{21} = T_{12}/2\mu.$$

با تعریف مدول برش، به عنوان نسبت تنش برشی - در برش ساده - به کاهش زاویه بین دو المان (که در ابتدا در جهات e_1 و e_2 قرار داشته‌اند) داریم:

$$\frac{T_{12}}{2E_{12}} = \mu.$$

بنابراین، ثابت لامه μ مدول برش نیز خوانده می‌شود

حالت سوم تنش، تنش هیدرواستاتیک[۱۶] است و با تانسور تنش $\mathbf{T}=\sigma\mathbf{I}$ تعریف می‌شود. در این حالت، معادله (۵ - ۷ ب) می‌دهد:

$$e = \frac{3\sigma}{2\mu + 3\lambda}.$$

به طوری که در بخش (۵ - ۱) اشاره شد، مدول حجمی K به صورت ضریب تنش عمودی هیدرواستاتیک σ بر تغییر واحد حجم، تعریف می‌شود. داریم

$$k = \frac{\sigma}{e} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}. \qquad (۵-۱۲)$$

با استفاده از معادلات (۵ - ۸)، (۵ - ۹)، (۵ - ۱۱) و (۵ - ۱۲) ثابتهای الاستیک تغییر می‌کنند. معادله (۵ - ۵ الف) نشان می‌دهد که برای توصیف یک ماده همسانگرد الاستیک خطی، تنها دو ثابت لازم

---

15 - simple shear

16 - hydrostatic stress

است و بسته به نوع کاربرد، اغلب دو جفت اساسی به کار گرفته می‌شوند که معمولا E_Y و ν یا μ و λ هستند. جدول ۵-۱ ثابتهای مختلف الاستیک را برحسب جفتهای اساسی نشان می‌دهد. جدول ۵-۲ برخی مقادیر برای تعدادی از مواد عمومی را رائه می‌کند.

جدول ۵-۱ تبدیل ثابتها برای یک ماده الاستیک همسانگرد.

	Basic Pair λ, μ	E_Y, ν
λ	λ	$\dfrac{\nu E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ	μ	$\dfrac{E_Y}{2(1+\nu)}$
k	$\lambda+\frac{2}{3}\mu$	$\dfrac{E_Y}{3(1-2\nu)}$
E_Y	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E_Y
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν

مثال ۵-۴

(الف) اگر برای یک ماده مشخص، نسبت مدول حجمی به مدول یانگ، بسیار بزرگ باشد،مقدار تقریبی ضریب پواسون را بیابید.

(ب) مشخص کنید که چرا ماده بخش (الف) را می‌توان تراکم ناپذیر نامید.

حل: (الف) برحسب ثابتهای لامه داریم:

$$\frac{k}{E_Y}=\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right) \quad و \quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

ترکیب دو معادله فوق می‌دهد:

$$\frac{k}{E_Y}=\frac{1}{3(1-2\nu)}.$$

بنابراین اگر $\frac{k}{E_Y}\to\infty$، ضریب پواسون $\leftarrow \frac{1}{2}$ میل خواهد کرد.

(ب) برای یک حالت اختیاری تنش، اتساع یا تغییر واحد حجم بدین صورت داده می‌شود:

$$e=\frac{T_{ii}}{3k}=\left(\frac{1-2\nu}{E_Y}\right)T_{ii}.$$

اگر $\nu\to\frac{1}{2}$ آن‌گاه $e\to 0$. یعنی ماده تراکم ناپذیر است. در یک ماده حقیقی، هرگز این امر مشاهده نشده است (که فشار هیدرواستاتیک، به افزایش منجر شود) لذا حد بالای ضریب پواسون $\nu=\frac{1}{2}$ است.

جدول ۵–۲ ثابهای الاستیک برای مواد همسانگرد و در دمای محیط

Material	Composition	Modulus of Elasticity E_Y		Poisson's Ratio ν	Sheer Modulus μ		Lamé Constant λ		Bulk Modulus k	
		10^6 psi	GPa		10^6 psi	GPa	10^6 psi	GPa	10^6 psi	GPa
Aluminum	Pure and alloy	9.9–11.4	68.2–78.5	0.32–0.34	3.7–3.85	25.5–26.53	6.7–9.1	46.2–62.7	9.2–11.7	63.4–80.6
Brass	60–70% Cu, 40–30% Zn	14.5–15.9	99.9–109.6	0.33–0.36	5.3–6.0	36.5–41.3	10.6–15.0	73.0–103.4	14.1–19.0	97.1–130.9
Copper		17–18	117–124	0.33–0.36	5.8–6.7	40.0–46.2	12.4–19.0	85.4–130.9	16.3–21.5	112.3–148.1
Iron, cast	2.7–3.6% C	13–21	90–145	0.21–0.30	5.2–8.2	35.8–56.5	3.9–12.1	26.9–83.4	7.4–17.6	51.0–121.3
Steel	Carbon and low alloy	28–32	193–220	0.26–0.29	11.0–11.9	75.8–82.0	12.0–17.1	82.7–117.8	19.3–25.0	133.0–172.3
Stainless steel	18% Cr, 8% Ni	28–30	193–207	0.30	10.6	73.0	16.2–17.3	111.6–119.2	23.2–24.4	160.5–168.1
Titanium	Pure and alloy	15.4–16.6	106.1–114.4	0.34	6.0	41.3	12.2–13.2	84.1–90.9	16.2–17.2	111.6–118.5
Glass	Various	7.2–11.5	49.6–79.2	0.21–0.27	3.8–4.7	26.2–32.4	2.2–5.3	15.2–36.5	4.7–8.4	32.4–57.9
Methyl methacrylate		0.35–0.5	2.41–3.45	—	—	—	—	—	—	—
Polyethylene		0.02–0.055	0.14–0.38	—	—	—	—	—	—	—
Rubber		0.00011–0.00060	0.00076–0.00413	0.50	0.00004–0.00020	0.00028–0.00138	∞†	∞†	∞†	∞†

†As ν approaches 0.5 the ratio of k/E_Y and $\lambda/\mu \to \infty$ as shown in Example 5.4. The actual value of k and λ for some rubbers may be close to the values of steel.

‡Partly from "An Introduction to the Mechanics of Solids," S. H. Crandall and N. C. Dahl, (Eds.), McGraw-Hill, 1959. (Used with permission of McGraw-Hill Book Company.)

۵-۵ - معادلات نظریه بی‌نهایت کوچک الاستیسیته

در بخش ۴ - ۷ معادلات حرکت کوشی را (که باید توسط هر محیط پیوسته‌ای ارضا شود) به صورت زیر استخراج کردیم:

$$\rho a_i = \rho B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad (۱۳-۵)$$

که ρ چگالی، a_i مولفه شتاب، ρB_i مولفه نیروی حجمی بر واحد حجم و T_{ij} مولفه‌های تنش هستند. تمامی جملات مولفه، منتسب به ذره‌ای در موقعیت جاری (x_1, x_2, x_3) است.

تنها حالت حرکات کوچک را لحاظ می‌کنیم، یعنی حرکاتی که هر ذره، همواره در نزدیکی حالت طبیعی خود واقع است.* به طور مشخص، اگر X_i موقعیت حالت طبیعی یک ذره باشد، فرض می‌کنیم که $x_i \approx X_i$ و این که مقدار مولفه‌های گرادیان تغییر مکان $\partial u_i/\partial X_j$ بسیار کوچکتر از واحد باشند.

چون

$$x_1 = X_1 + u_1,$$

$$x_2 = X_2 + u_2,$$

و

$$x_3 = X_3 + u_3,$$

داریم:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_1} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_1}$$

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1}\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial X_1}.$$

بنابراین برای حرکت کوچک:

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_1}\right) \approx \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1}\right).$$

به طور مشابه:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_2} \approx \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2} \quad \text{and} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_3} \approx \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_3}.$$

بنابراین:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \approx \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

---

* حالت طبیعی natural state را وضعیت بدون تنش جسم، فرض می‌کنیم.

چون:

$$a_i = \left.\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right|_{X_i\text{-fixed}} = \left.\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right|_{X_i\text{-fixed}}$$

و (مسئله ۳-۲۱ ب را ببینید)

$$\rho = \rho_0(1-E_{kk}),$$

بنابراین

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \approx \rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

که در آن، ρ_0 چگالی در حالت طبیعی است. در نهایت، معادلات حاکم بر حرکات کوچک اجسام الاستیک را خواهیم داشت:

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}. \tag{۱۴-۵}$$

میدان تغییر مکان u_i، توصیف کنندهٔ یک حرکت ممکن در یک محیط الاستیک است. اگر میدان تغییر مکان $u_i=u_i(X_1, X_2, X_3, t)$ در دست باشد، برای اطمینان از این که این یک حرکت ممکن است، می‌توانیم نخست میدان کرنش را از

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{۱۵-۵}$$

محاسبه کرده، سپس میدان تنش T_{ij} متناظر را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \tag{۱۶-۵}$$

با قرار دادن u_i و T_{ij} در معادله (۵-۱۴) بررسی خواهیم کرد که آیا حرکت داده شده ممکن هست یا خیر. اگر حرکت امکان پذیر بود، اثرات سطحی روی مرز جسم نیز برای حفظ حرکت مورد نیازند، و توسط رابطه زیر داده می‌شوند:

$$t_i = T_{ij}n_j. \tag{۱۷-۵}$$

به عبارت دیگر، اگر شرایط مرزی از قبل معلوم باشند (یعنی مرزهای مشخصی از جسم باید همواره ثابت باقی بمانند و بقیه مرزها در تمامی مواقع بدون اثر سطحی باشند و غیره) آن گاه برای این که u_i جواب مسئله باشد، باید شرایط مرزی معلوم را ارضا نماید.*

* کلی تر از این، شرایط اولیه نیز وجود دارند که باید در سراسر جسم ارضا شوند.

مثال ۵-۵

با ترکیب معادلات (۵-۱۴)، (۵-۱۵) و (۵-۱۶)، معادلات حرکت ناویر را برحسب فقط مولفه‌های تغییر مکان به دست آورید.

حل: از

$$T_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

داریم:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} = \lambda \frac{\partial e}{\partial X_j} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_j}\right).$$

حال:

$$\frac{\partial e}{\partial X_j} \delta_{ij} = \frac{\partial e}{\partial X_i}.$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial X_j \partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial X_j}\right) = \frac{\partial e}{\partial X_i}.$$

بنابراین، معادله حرکت می‌شود

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 B_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j}. \qquad (۵-۱۸)$$

که

$$e = \frac{\partial u_j}{\partial X_j} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}.$$

برای $i = ۱$ داریم

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \rho B_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial X_1} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}\right) u_1.$$

برای ۳ و ۲ = i، معادلات، شکل مشابهی خواهند داشت.

۵-۶ - اصل جمع آثار

فرض کنید که $u_i^{(1)}$ و $u_i^{(2)}$ دو میدان تغییر مکان ممکن با دو میدان نیروی حجمی $B_i^{(1)}$ و $B_i^{(2)}$ متناظر و $T_{ij}^{(1)}$ و $T_{ij}^{(2)}$ میدانهای تنش مربوطه باشند.

آن گاه

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} = \rho_0 B_i^{(1)} + \frac{\partial T_{ij}^{(1)}}{\partial X_j}$$

و

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} = \rho_0 B_i^{(2)} + \frac{\partial T_{ij}^{(2)}}{\partial X_j}.$$

با جمع دو معادله فوق به دست می‌آید:

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_i^{(1)}+u_i^{(2)}) = \rho_0(B_i^{(1)}+B_i^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial X_j}(T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(2)}).$$

از خطی بودن معادلات (۵-۱۵) و (۵-۱۶) واضح است که $T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(2)}$ میدان تنشی است متناظر با میدان تغییر مکان $u_i^{(1)}+u_i^{(2)}$. بنابراین، $u_i^{(1)}+u_i^{(2)}$ نیز یک حرکت مکن، تحت میدان نیروی حجمی $B_i^{(1)}+B_i^{(2)}$ می‌باشد. میدانهای تنش مربوطه توسط $T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(2)}$ ارائه می‌شوند. این، اصل جمع آثار[19] است. یکی از کاربردهای این اصل این است که در یک مسئله داده شده، اغلب فرض می‌شود که نیروی حجمی وجود ندارد، با این فرض که اگر اثر آن قابل صرف نظر کردن نباشد، همواره می‌توان آن را جداگانه به دست آورد و سپس بر حل اولیهٔ بدون نیروی حجمی افزود.

۵-۷ - برخی مثالهای الاستودینامیک

الف - موج غیر چرخشی مسطح[20]

حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$u_1 = \epsilon \sin \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \tag{I}$$

که نمایشگر یک سلسلهٔ بی‌نهایت، از امواج سینوسی مسطح می‌باشد. در این حرکت، هر ذره، نوسانات هماهنگ[21] ساده را با دامنه کوچک ε حول حالت طبیعی آن اجرا می‌کند و حرکت، همواره موازی جهت e_1 می‌باشد. تمامی ذرات روی صفحه عمود بر e_1، با فاز یکسان، دارای حرکت هماهنگ (هارمونیک) در هر لحظه می‌باشند [یعنی دارای مقدار یکسان $2\pi(X_1-C_L t)/l$]. ذره مشخص شده توسط X_1+dX_1، در زمان $t+dt$ همان فازی را داراست که ذره‌ای با X_1 در زمان t (به شرط آن که $(X_1+dX_1)-C_L(t+dt)=X_1-C_L t$ یعنی، $dX_1/dt=C_L$ باشد).

19- priciple of superpostion

20 - plane irrotatioal wave

21 - harmonic

بنابراین، C_L به عنوان سرعت فاز[۲۲] شناخته می‌شود و سرعتی است که با آن، اغتشاش سینوسی[۲۳] با طول موج l در جهت e_i در حال حرکت است. از آن جاکه حرکات ذرات، موازی جهت انتشار موج می‌باشد، لذا این ، یک موج طولی است.

حال این موج (که یک حرکت ممکن در یک محیط لاستیک است) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مولفه‌های کرنش متناظر با u_i داده شده در معادله (۱) عبارت اند از:

$$E_{11} = \epsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t),$$
$$E_{22} = E_{33} = E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0.$$

مولفه‌های تنش، عبارت اند از (توجه شود $e=E_{11}+0+0$):

$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)E_{11},$$
$$T_{22} = \lambda E_{11},$$
$$T_{33} = \lambda E_{11},$$
$$T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

T_{ij} و u_i را در معادله حرکت قرار دهید*:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}$$

به سادگی دیده می‌شود که معادلات دوم و سوم حرکت، به صورت خودکار ارضا شده(۰ = ۰) و نخستین معادله چنین خواهد بود:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1}$$

یا

$$-\rho_0\epsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 c_L^2 \sin\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t) = -(\lambda + 2\mu)\epsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t)$$

22 - phase velocity

23 - disturbance

* از نیروهای حجمی B_i صرف نظر شده است.

بنابراین، سرعت فاز C_l به دست می‌آید :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}. \tag{۱۹-۵}$$

بنابر این، دیده می‌شود که با C_l ارائه شده توسط معادله (۵ - ۱۹) ، حرکت موج مورد نظر، امکان پذیر است. از آن جاکه برای این حرکت ، مولفه‌های تانسور چرخش

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

همواره صفر است، لذا به عنوان موج غیر چرخشی[25] مسطح شناخته می‌شود. وقتی یک ذره نوسان می‌کند، حجم آن نیز به طور هماهنگ تغییر می‌یابد [اتساع $(e=E_{11}=\varepsilon(2\pi/l)cos(2\pi/l)(X_1-C_lt)$]، لذا این موج، به عنوان موج اتساعی[26] نیز معروف است.

از معادله (۵ - ۱۹) دیده می‌شود که برای موج مسطح مورد بحث ، سرعت فاز C_L تنها وابسته به خواص ماده است و نه به طول موج l. بنابراین، هر نوع اغتشاش (حاصل از جمع هر تعداد سلسله موج غیر چرخشی مسطح یک بعدی و با طول موجهای مختلف) بدون تغییر شکل اغتشاش (که دیگر سینوسی نیست)، با سرعتی برابر سرعت فاز منتشر می‌شود. در حقیقت، به سادگی می‌توان دید [از معادله (۵ - ۱۸)]که هر اغتشاش غیرچرخشی (که با رابطه زیر داده می‌شود):

$$u_1 = u_1(X_1, t), \quad u_2 = u_3 = 0 \tag{۲۰-۵}$$

یک حرکت امکان پذیر در غیاب نیروهای حجمی است، به شرط آن که $u_1(X_1,t)$ یک حل برای معادله موج ساده باشد:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2}. \tag{۲۱-۵}$$

به سادگی دیده می‌شود که $u_1=f(s)$ (که در آن $s=X_1\pm C_Lt$ است) معادله فوق را برای هر تابع f ارضا می‌کند. بنابراین ، اغتشاشاتی که بتوان به صورت $f(s)$ تعریف کرد، بدون تغییر شکل و با سرعت C_L منتشر می‌شوند. به عبارت دیگر، سرعت فاز، نرخ پیشروی سلسله محدود امواج - یا هرگونه اغتشاش

---

25 - irrotational wave

26 - dilatational wave

اختیاری - به یک ناحیه غیرمغشوش نیز می‌باشد.

مثال ۵-۶

میدان تغییر مکان زیر را در نظر بگیرید:

$$u_1 = \alpha \sin \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t) + \beta \cos \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t),$$
$$u_2 = u_3 = 0$$

برای ماده‌ای که در طرف راست صفحه $X_1=0$ قرار گرفته است:

(الف) اگر تغییر مکان اعمال شده روی صفحه $X_1=0$ به صورت $\mathbf{u}=(b\sin\omega t)\mathbf{e}_1$ داده می‌شود، α، β و l را محاسبه کنید.

(ب) اگر اثر سطحی وارده روی $X_1=0$ به وسیله $\mathbf{t}=(d\sin\omega t)\mathbf{e}_1$ داده شود، α، β و l را به دست آورید.

حل: میدان تغییر مکان داده شده، جمع دو موج الاستیک طولی با سرعت انتشار یکسان C_L در جهت مثبت X_1 می‌باشد، بنابراین، یک حل الاستیک ممکن خواهد بود.

(الف) برای ارضا شرط مرزی تغییر مکان، داریم: $u_1(0,t) = b\sin\omega t$

یا

$$-\alpha \sin\left(\frac{2\pi c_L}{l}\right)t + \beta\cos\left(\frac{2\pi c_L}{l}\right)t = b\sin\omega t.$$

چون این رابطه، برای تمامی زمانهای t باید ارضا شود داریم:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -b, \quad l = \frac{2\pi c_L}{\omega}$$

و موج الاستیک دارای شکل زیر است:

$$u_1 = -b\sin\frac{\omega}{c_L}(X_1 - c_L t).$$

توجه کنید که طول موج، به طور معکوس با فرکانس اجباری [27] متناسب است. یعنی هرچه فرکانس اجباری بیشتر باشد، طول موج الاستیک کوتاهتر خواهد بود.

(ب) برای ارضای شرط مرزی نیرو (اثر) روی $X_1=0$، ضروری است که:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}(-\mathbf{e}_1) = -(T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3) = (d\sin\omega t)\mathbf{e}_1,$$

---

27 - forcing frequency

یعنی در $X_1=0$، $T_{11}=-d\sin\omega t$، و $T_{21}=T_{31}=0$. برای میدان تغییر مکان مفروض:

$$T_{11}=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial X_1},\quad T_{21}=T_{31}=0,$$

بنابراین:

$$-d\sin\omega t=(2\mu+\lambda)\left[\alpha\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}(X_1-c_Lt)-\beta\left(\frac{2\pi}{l}\right)\sin\frac{2\pi}{l}(X_1-c_Lt)\right]_{X_1=0},$$

یعنی

$$-d\sin\omega t=(2\mu+\lambda)\frac{2\pi}{l}\left[\alpha\cos\frac{2\pi}{l}c_Lt+\beta\sin\frac{2\pi}{l}c_Lt\right].$$

برای ارضای این رابطه برای همه زمانهای t، داریم:

$$\alpha=0,\quad \beta=\frac{-d}{2\mu+\lambda}\left(\frac{l}{2\pi}\right),\quad \omega=\frac{2\pi c_L}{l}$$

یا

$$\alpha=0,\quad \beta=\frac{-dc_L}{(2\mu+\lambda)\omega},\quad l=\frac{2\pi c_L}{\omega},$$

و موج حاصله به شکل زیر است:

$$u_1=\frac{-dc_L}{(2\mu+\lambda)\omega}\cos\frac{\omega}{c_L}(X_1-c_Lt).$$

توجه کنید که نه تنها طول موج، که دامنه[28] موج حاصله نیز به طور معکوس با فرکانس اجباری متناسب است.

(ب) موج مسطح هم حجم

حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$u_1=0,\quad u_2=\epsilon\sin\frac{2\pi}{l}(X_1-c_Tt),\quad u_3=0. \tag{II}$$

این سلسلهٔ متشکل از بینهایت موج هماهنگ مسطح، از این بابت با موج مطرح شده در بخش ۵-۷ متفاوت است که این موج، عرضی[29] است: حرکت ذره موازی e_2 است، حال آن که اغتشاش، در جهت e_1 منتشر می‌شود.

برای این حرکت، مولفه‌های کرنش، عبارت‌اند از:

$$E_{11}=E_{22}=E_{33}=E_{13}=E_{23}=0$$

28 - amplitude

29 - transverse wave

و

$$E_{12}=\frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}\,(X_1-c_Tt),$$

و مولفه‌های تنش، عبارت اند از:

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}=T_{13}=T_{23}=0$$

و

$$T_{12}=\mu\epsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}\,(X_1-c_Tt).$$

با قرار دادن u_i و T_{ij} در معادله حرکت، و صرف نظر از نیروی حجمی، سرعت فاز C_T به دست می‌آید:

$$c_T=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \qquad (۲۲-۵)$$

از آن جاکه در این حرکت، اتساع ε همواره صفر است، به عنوان "موج هم حجم"[30] شناخته می‌شود. این حرکت، "موج برشی"[31] نیز نامیده می‌شود.

در اینجا نیز سرعت فاز C_T، مستقل از طول موج E است. بنابراین، این بار نیز دارای اهمیت اضافی (به علت سریع بودن موج یک سلسلهٔ محدود از امواج هم حجم، یا هر اغتشاش هم حجم دلخواه در یک ناحیه مغشوش) است.

نسبت دو سرعت فاز C_L و C_T عبارت است از:

$$\frac{c_L}{c_T}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}.$$

چون $\lambda=2\mu\nu/(1-2\nu)$ است، نسبت فوق، در حقیقت، فقط وابسته به ν است

$$\frac{c_L}{c_T}=\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-2\nu}\right)}. \qquad (۲۳-۵)$$

برای فولاد با $\nu=0.3$، $C_L/C_T=\sqrt{7.2}=1.78$ است. چون $\nu<\frac{1}{2}$ است، C_L همواره بزرگتر از C_T می‌باشد.

30 - equivoluminal wave

31 - shear wave

مثال ۵-۷

میدان تغییر مکان زیر را

$$u_2 = \alpha \sin\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t) + \beta \cos\frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t),$$

$$u_1 = u_3 = 0$$

برای ماده‌ای که در نیمه طرف راست صفحه $X_1 = 0$ واقع شده است در نظر بگیرید.

(الف) اگر تغییر مکان اعمال شده روی $X_1 = 0$ به صورت $\mathbf{u} = (b\sin\omega t)\mathbf{e}_2$ داده شود، مقادیر α، β و l را محاسبه کنید.

(ب) مقادیر α، β و l را به دست آورید، اگر اثر سطحی وارده روی $X_1 = 0$ ، $\mathbf{t} = (d\sin\omega t)\mathbf{e}_2$ باشد.

حل: مسئله، مشابه مثال قبلی است.

(الف) با استفاده از $u_2(0,t) = (b\sin\omega t)$، داریم:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -b, \quad l = \frac{2\pi c_T}{\omega}$$

و

$$u_2 = -b\sin\frac{\omega}{c_T}(X_1 - c_T t).$$

(ب) با استفاده از $\mathbf{t} = -T_{21}\mathbf{e}_2 = (s\sin\omega t)\mathbf{e}_2$ می‌دهد.

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{-dc_T}{\mu\omega}, \quad l = \frac{2\pi c_T}{\omega},$$

و

$$u_2 = \frac{-dc_T}{\mu\omega}\cos\frac{\omega}{c_T}(X_1 - c_L t).$$

مثال ۵-۸

میدان تغییر مکان زیر را در نظر بگیرید.

$$u_3 = \alpha \cos pX_2 \cos\frac{2\pi}{l}(X_1 - ct),$$

$$u_2 = u_1 = 0.$$

(الف) نشان دهید که این، یک حرکت هم حجم است.

(ب) از معادله حرکت، سرعت فاز C_T را برحسب p، l، ρ_0 و μ محاسبه کنید (از نیروهای حجمی صرف نظر شود).

(ج) این میدان تغییر مکان، برای توصیف نوعی هادی موج[32] به کار می‌رود که توسط صفحات $X_2 = \pm h$

---

32 - wave guide

مقید شده است. چنان چه این صفحات، بدون اثر سطحی باشند، سرعت فاز C را بیابید.

حل: (الف) چون $$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1}+\frac{\partial u_2}{\partial X_2}+\frac{\partial u_3}{\partial X_3}=0+0+0=0,$$

بنابراین، هیچ‌گونه تغییری در حجم - در هیچ زمانی وجود ندارد.

(ب) بنابه قرار داد، فرض کنید: $$k=2\pi/l \text{ and } \omega=kc=2\pi c/l$$

$$u_3=\alpha\cos pX_2\cos(kX_1-\omega t),$$

که در آن، k به عنوان عدد موج [33] در فرکانس زاویه‌ای خوانده می‌شود. تنها تنشهای غیر صفر، به صورت زیر ارائه می‌شوند (توجه کنید که : $u_1=u_2=0$)

$$T_{13}=T_{31}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial X_1}=\alpha\mu k[-\cos pX_2\sin(kX_1-\omega t)],$$

$$T_{23}=T_{32}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial X_2}=\alpha\mu p[-\sin pX_2\cos(kX_1-\omega t)].$$

با قرار دادن مولفه‌های تنش در معادله سوم حرکت (دو معادله اول خود به خود ارضا می‌شوند)

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial X_1}+\frac{\partial T_{32}}{\partial X_2}=(\mu k^2+\mu p^2)(-u_3)=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=\rho_0\omega^2(-u_3).$$

بنابراین با $C_T^2=\mu/\rho$

$$k^2=\frac{\rho_0}{\mu}\omega^2-p^2=\left(\frac{\omega}{c_T}\right)^2-p^2.$$

چون $k=2\pi/l$ ، $\omega=2\pi c/l$، پس

$$c=c_T\left[\left(\frac{lp}{2\pi}\right)^2+1\right]^{1/2}.$$

(ج) ارضای شرط مرزی ، بدون بردار اثر در $X_2=\pm h$، مستلزم این است که

$$\mathbf{t}=\pm\mathbf{T}\mathbf{e}_2=\pm(T_{12}\mathbf{e}_1+T_{22}\mathbf{e}_2+T_{32}\mathbf{e}_3)=\pm T_{32}\mathbf{e}_3=0,$$

بنابراین: $$T_{32}\big]_{X_2=\pm h}=\mp\mu p\alpha\sin ph\cos(kX_1-\omega t)=0$$

برای این که این رابطه برای تمامی X_1 و t ارضا شود، باید داشته باشیم: $$\sin ph=0.$$

بنابراین: $$p=\frac{n\pi}{h},\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

هر مقدار n، یک میدان تغییر مکان ممکن را مشخص می‌کند، و سرعت فاز C متناظر با هرمد [34]، توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$c=c_T\left[\left(\frac{ln}{2h}\right)^2+1\right]^{1/2}.$$

33 wave number

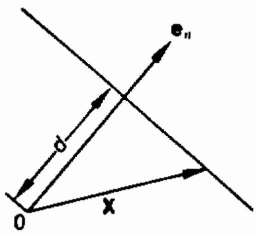
34 - mode

این نتیجه، مبین آن است که موج هم حجم، با سرعت C منتشر می‌شود (که بزرگتر از سرعت یک موج هم حجم مسطح C_T می‌باشد). توجه کنید که همان گونه که انتظار می‌رفت: $C=C_T$ ، $P=0$

مثال ۵-۹

سلسله‌ای از امواج مسطح هارمونیک، در جهت برداریکهٔ $\mathbf{e}_n$ منتشر میشود. میدان تغییر مکان را برای (الف) یک موج طولی[۳۵]، (ب) یک موج عرضی[۳۶] به شکل برداری نمایش دهید.

حل: فرض کنید $\mathbf{X}$ بردار موقعیت هر نقطه روی صفحهٔ با عمود $\mathbf{e}_n$ و فاصله از مبدا d باشد، پس $\mathbf{X}.\mathbf{e}_n=d$. بنابراین، برای این که ذرات واقع در روی صفحه، در فاز همسان از نوسان هارمونیک در هر زمانی باشند، جمله عمومی[۳۷] سینوس (یاکسینوس) بایدبه شکل $(2\pi/l)(\mathbf{X}.\mathbf{e}_n-ct-\eta)$ باشد (که η یک ثابت اختیاری است).



شکل ۵-۳

(الف) برای امواج طولی، $\mathbf{u}$ باید موازی $\mathbf{e}_n$ باشد، لذا

$$\mathbf{u}=\epsilon\left[\sin\frac{2\pi}{l}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_n-c_Lt-\eta)\right]\mathbf{e}_n. \tag{۲۴-۵}$$

به خصوص اگر $\mathbf{e}_n=\mathbf{e}_1$ باشد، آن‌گاه: $u_1=\epsilon\sin(2\pi/l)(X_1-c_Lt-\eta),\ u_2=u_3=0$

(ب) برای امواج عرضی، $\mathbf{u}$ عمود بر $\mathbf{e}_n$ می‌باشد. فرض کنید $\mathbf{e}_t$ بردار یکه عمود بر $\mathbf{e}_n$ باشد. آن‌گاه:

$$\mathbf{u}=\epsilon\left[\sin\frac{2\pi}{l}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_n-c_Tt-\eta)\right]\mathbf{e}_t. \tag{۲۵-۵}$$

صفحه $\mathbf{e}_t$ و $\mathbf{e}_n$ به عنوان صفحه قطبی[۳۸] شناخته می‌شود. به خصوص، اگر $\mathbf{e}_n=\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_t=\mathbf{e}_2$ باشند، آن

35 - longitudinal wave

36 - transverse wave

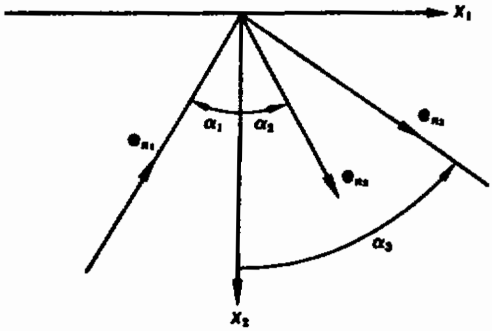
37 - argument

38 - plane of polarization

گاه:
$$u_1 = 0, \quad u_2 = \epsilon \sin \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t - \eta), \quad u_3 = 0.$$

مثال ۵-۱۰

در شکل، هر سه بردار های یکه $\mathbf{e}_{n_1}$ و $\mathbf{e}_{n_2}$ و $\mathbf{e}_{n_3}$ در صفحه X_1X_2 قرار دارند. مولفه‌های تغییر مکان را برحسب مختصات X_i - از امواج مسطح هارمونیک - نشان دهید برای (الف) یک موج عرضی با دامنه[39] ε_1، و طول موج l_1، قطبی شده در صفحه X_1X_2 و منتشره در جهت $\mathbf{e}_{n_1}$، (ب) یک موج عرضی با دامنه ε_2، و طول موج l_2، قطبی شده در صفحه X_1X_2 و منتشره در جهت $\mathbf{e}_{n_2}$، (پ) یک موج طولی با دامنه ε_3، و طول موج l_3، منتشره در جهت $\mathbf{e}_{n_3}$.



شکل ۵-۴

حل: با استفاده از نتایج مثال ۵-۹ داریم:

(الف)
$$\mathbf{e}_{n_1} = \sin\alpha_1 \mathbf{e}_1 - \cos\alpha_1 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_{n_1} = X_1 \sin\alpha_1 - X_2\cos\alpha_1,$$
$$\mathbf{e}_{t_1} = \pm(\cos\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \sin\alpha_1 \mathbf{e}_2).$$

بنابراین * :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \cos\alpha_1 \\ u_2 = \sin\alpha_1, \end{array}\right\} \epsilon_1 \sin\frac{2\pi}{l_1}(X_1\sin\alpha_1 - X_2\cos\alpha_1 - c_T t - \eta_1).$$
$$u_3 = 0.$$

(ب)
$$\mathbf{e}_{n_2} = \sin\alpha_2 \mathbf{e}_1 + \cos\alpha_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_{n_2} = X_1\sin\alpha_2 + X_2\cos\alpha_2,$$
$$\mathbf{e}_{t_2} = \pm(\cos\alpha_2 \mathbf{e}_1 - \sin\alpha_2 \mathbf{e}_2).$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \cos\alpha_2 \\ u_2 = -\sin\alpha_2, \end{array}\right\} \epsilon_2 \sin\frac{2\pi}{l_2}(X_1\sin\alpha_2 + X_2\cos\alpha_2 - c_T t - \eta_2),$$
$$u_3 = 0.$$

39 - amplitude

* علامت $\mathbf{e}_{t_1}$ را می‌توان در ثابت اختیاری η_1 گنجاند.

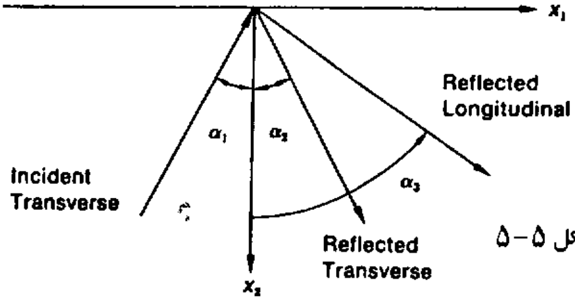
$$\mathbf{e}_{n_3}=\sin\alpha_3\mathbf{e}_1+\cos\alpha_3\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_{n_3}=X_1\sin\alpha_3+X_2\cos\alpha_3. \qquad (\text{پ})$$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\sin\alpha_3\\u_2&=\cos\alpha_3,\end{aligned}\right\}\epsilon_3\sin\frac{2\pi}{l_3}(X_1\sin\alpha_3+X_2\cos\alpha_3-c_Lt-\eta_3),$$
$$u_3=0.$$

پ - انعکاس امواج الاستیک مسطح

در شکل ۵ - ۵، صفحه $X_2=0$ مرز آزاد یک محیط الاستیک است که نیمه فضای پایینی $X_2\geq 0$ را اشغال می‌کند. در پی کشف این هستیم که چگونه یک موج مسطح تابشی توسط مرز منعکس می‌شود.



شکل ۵-۵

یک موج عرضی تابشی به طول موج l_1، قطبی شده در صفحه تابش، با زاویه تابش α_1 را در نظر بگیرید (شکل ۵ - ۵ را ببینید). چون $X_2=0$ یک مرز آزاد است، بردار اثر سطح، همواره برابر صفر است. بنابراین، مرز طوری امواج انعکاسی را ایجاد می‌کند که وقتی روی موج تابشی سوار می‌شوند، بردار تنش روی مرز - برای همه زمانها - حذف می‌شود.

اگر روی موج عرضی تابشی، دو موج انعکاسی را جمع کنیم (شکل ۵ - ۵ را ببینید)، یکی عرضی و دیگر طولی، هردو در صفحه تابش نوسان خواهند کرد. علت جمع کردن موج طولی علاوه بر موج عرضی منعکس شده این است که ، با جمع تنها یکی از آنها، شرط مرز بدون تنش - در حالت کلی - نمی‌تواند ارضا شود (به طوری که در استخراج زیر نشان داده خواهد شد):

فرض کنید u_i معرف مولفه‌های تغییر مکان جمع سه موج باشد. از نتایج مثال ۵ - ۱۰، داریم:

$$\begin{aligned}u_1&=\\u_2&=\end{aligned}\begin{Bmatrix}\cos\alpha_1\\\sin\alpha_1\end{Bmatrix}\epsilon_1\sin\phi_1+\begin{Bmatrix}\cos\alpha_2\\-\sin\alpha_2\end{Bmatrix}\epsilon_2\sin\phi_2+\begin{Bmatrix}\sin\alpha_3\\\cos\alpha_3\end{Bmatrix}\epsilon_3\sin\phi_3, \qquad (1)$$
$$u_3=0,$$

که

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{l_1}(X_1 \sin\alpha_1 - X_2 \cos\alpha_1 - c_T t - \eta_1),$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{l_2}(X_1 \sin\alpha_2 + X_2 \cos\alpha_2 - c_T t - \eta_2), \qquad (۲)$$

$$\phi_3 = \frac{2\pi}{l_3}(X_1 \sin\alpha_3 + X_2 \cos\alpha_3 - c_L t - \eta_3).$$

روی سطح یا مرز آزاد ($X_2=0$)، که $\mathbf{n}=-\mathbf{e}_2$ است، شرط $\mathbf{t}=0$ منجر می‌شود به

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_2 = 0,$$

یعنی

$$T_{12} = T_{22} = T_{32} = 0.$$

با استفاده از قانون هوک، و این که $u_3=0$ و u_2 و u_1 وابسته به X_3 نیستند، به سادگی دیده می‌شود که شرط $T_{32}=0$ به طور خودکار ارضا می‌شود. دو شرط دیگر، برحسب مولفه‌های تغییر مکان عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = 0 \quad \text{روی} \quad X_2 = 0 \qquad (\text{الف ۱})$$

(الف ۲)

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = 0.$$

با انجام دیفرانسیل گیری لازم، از معادلات (الف ۱) و (الف ۲) بدست می‌آید:

(ب ۱)

$$\frac{\epsilon_1}{l_1}(\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1)\cos\phi_1 + \frac{\epsilon_2}{l_2}(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_2)\cos\phi_2 + \frac{\epsilon_3}{l_3}(\sin 2\alpha_3)\cos\phi_3 = 0,$$

(ب ۲)

$$\frac{\epsilon_1}{l_1}\mu \sin 2\alpha_1 \cos\phi_1 + \frac{\epsilon_2}{l_2}\mu \sin 2\alpha_2 \cos\phi_2 - \frac{\epsilon_3}{l_3}(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_3)\cos\phi_3 = 0.$$

چون این معادلات باید روی $X_2=0$ و برای تمامی مقادیر X_1 و t ارضا شوند، باید داشته باشیم:

$$\cos\phi_1 = \cos\phi_2 = \cos\phi_3 \quad \text{روی} \quad X_2 = 0$$

به طوری که از معادلات (ب ۱) و (ب ۲)حذف شوند. بنابراین ، در $X_2=0$، $\phi_1=\phi_3\pm 2p\pi=\phi_3\pm 2q\pi$

که در آن، p و q اعداد صحیح می‌باشند، یعنی:

$$\frac{2\pi}{l_1}(X_1 \sin\alpha_1 - c_T t - \eta_1) = \frac{2\pi}{l_2}(X_1 \sin\alpha_2 - c_T t - \eta_2') \qquad (\text{پ})$$

$$= \frac{2\pi}{l_3}\,(X_1 \sin\alpha_3 - c_L t - \eta_3'),$$

که $\eta_2' = \eta_2 \mp p l_2$ and $\eta_3' = \eta_3 \mp q l_3$

معادله (پ) برای هر مقدار X_1 و t زمانی می‌تواند ارضا شود که اگر:

(ت ۱) $$\frac{\sin\alpha_1}{l_1} = \frac{\sin\alpha_2}{l_2} = \frac{\sin\alpha_3}{l_3},$$

(ت ۲) $$\frac{c_T}{l_1} = \frac{c_T}{l_2} = \frac{c_L}{l_3},$$

و

(ت ۳) $$\frac{\eta_1}{l_1} = \frac{\eta_2'}{l_2} = \frac{\eta_3'}{l_3}.$$

بنابراین:

(۵-۲٦ الف) $$l_2 = l_1,$$

(۵-۲٦ ب) $$n l_3 = l_1, \quad \text{که} \quad \frac{1}{n} = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}$$

(۵-۲٦ پ) $$\alpha_1 = \alpha_2$$

(۵-۲٦ ت) $$n \sin\alpha_3 = \sin\alpha_1,$$

(۵-۲٦ ث) $$\eta_2' = \eta_1,\ n\eta_3' = \eta_1.$$

یعنی موج عرض منعکس شده، دارای همان طول موج عرضی تابشی است و زاویه انعکاس‌و نظیر زاویه تابش موج طولی دارای طول موج و نیز زاویه انعکاس متفاوت است که وابسته به ضریبی موسوم به "ضریب شکست"[41] می‌باشد.

با حذف $\cos\phi_i$ و با توجه به معادلات (۵-۲٦)، اینک شرایط مرزی (ب ۱) و (ب ۲) چنین می‌شوند:

(ث ۱) $$\epsilon_1(\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) + \epsilon_2(\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) + \epsilon_3 n \sin 2\alpha_3 = 0,$$

(ث ۲) $$\epsilon_1(\mu \sin 2\alpha_1) + \epsilon_2(\mu \sin 2\alpha_1) - \epsilon_3 n(2\mu \cos^2\alpha_3 + \lambda) = 0.$$

این دو معادله، تواماً، دامنه امواج منعکس شده را برحسب دامنه امواج تابشی (که اختیاری است) به دست

41 - refraction index

می‌دهند. در حقیقت:

$$\epsilon_3 = \frac{n \sin 4\alpha_1}{\cos^2 2\alpha_1 + n^2 \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_3}\epsilon_1, \tag{۵-۲۷ الف}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\cos^2 2\alpha_1 - n^2 \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_3}{\cos^2 2\alpha_1 + n^2 \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_3}\epsilon_1. \tag{۵-۲۷ ب}$$

بدین ترتیب، مسئله انعکاس موج عرضی قطبی شده[۴۲] در صفحه تابش[۴۳] حل می‌شود. خاطرنشان می‌سازیم که اگر موج عرضی تابشی، عمود بر صفحه تابش، قطبی شود، هیچ مولفه طولی ایجاد نمی‌کند. همچنین اگر یک موج طولی تابشی، منعکس شود، علاوه بر موج طولی منعکس شدهٔ معمول، یک موج عرضی قطبی شده، در صفحه تابش نیز ایجاد خواهد کرد.

معادله (۵ - ۲٦ ت) مشابه قانون نوری اسنل[۴۴] است، به استثنای این که در این‌جا، به جای شکست[۴۵] انعکاس داریم. اگر $\alpha_1 > n$ باشد، آن‌گاه $\alpha_3 > 1$ بوده، هیچ موج طولی منعکس شده وجود نخواهد داشت، و بیشتر، امواج با طبیعت پیچیده‌تری ایجاد خواهند شد. زاویه $\alpha_i = \sin^{-1} n$، زاویه بحرانی خوانده می‌شود.

ت . ارتعاش یک ورق بی‌نهایت

یک ورق بی‌نهایت و محدود به صفحات $X_1 = 0$ و $X_1 = l$ را در نظر بگیرید. این وجوه سطح، ممکن است با یک حرکت از پیش توصیف شده (ثابت، در ارتباط با سکون) یا یک اثر سطحی از پیش توصیف شده (آزاد، در ارتباط با بدون اثر سطحی) باشند.

حضور این دو مرز، مبین امکان وجود ارتعاش است (یک موج ساکن[۴٦]). با فرض این آغاز می‌کنیم که ارتعاش به شکل زیر است:

$$u_1 = u_1(X_1, t), \quad u_2 = u_3 = 0,$$

42 - polarized

43 - incidence

44- optical snell's law

45 - refraction

46 - standing wave

درست مثل امواج طولی، تغییر مکان باید معادله زیر را ارضا نماید.

$$c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

یک حل ارتعاش پایدار برای این معادله به شکل زیر است:

$$u_1 = (A \cos \lambda X_1 + B \sin \lambda X_1)\ (C \cos c_L \lambda t + D \sin c_L \lambda t), \qquad (۲۸-۵)$$

که در آن، ثابتهای A، B، C و λ به کمک شرایط مرزی محاسبه می‌شوند. این مد[47] ارتعاش، گاهی یک ارتعاش "کشش ضخامت"[48] نامیده می‌شود، زیرا ورق، از طرف ضخامتش کشیده می‌شود. این، مشابه ارتعاش آکوستیک لوله‌های ارگ[49] و نیز ارتعاش طولی میله‌های لاغر[50] است.

مد ارتعاش دیگر را می‌توان با فرض میدان تغییر مکان زیر به دست آورد

$$u_2 = u_2(X_1, t), \quad u_1 = u_3 = 0.$$

در این حالت، میدان تغییر مکان باید معادله زیر را ارضا نماید:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

و پاسخ، به همان شکل قبل است.

این ارتعاش، "برش ضخامت"[51] نامیده می‌شود و مشابه تار در حال ارتعاش است.

مثال ۵-۱۱

(الف) ارتعاش کشش ضخامت ورقی را پیدا کنید که وجه چپ آن ($X_1=0$) تحت تغییر مکان اجباری $\mathbf{u}=(\alpha \cos \omega t)\mathbf{e}_1$ قرار گرفته و وجه راست ($X_1=l$) آن ثابت است.

حل: (الف) با استفاده از معادله (۵-۲۸) و نخستین شرط مرزی، داریم:

$$\alpha \cos \omega t = u_1(0, t) = AC \cos c_L \lambda t + AD \sin c_L \lambda t.$$

---

47 - mode

48 - thickness stretch

49 - organ pipes

50 - slender rods

51 - thickness shear

بنابراین:
$$AC=\alpha, \quad \lambda=\frac{\omega}{c_L}, \quad \text{و} \quad D=0.$$

دومین شرط مرزی می‌دهد:
$$0=u_1(l,t)=\left(\alpha\cos\frac{\omega l}{c_L}+BC\sin\frac{\omega l}{c_L}\right)\cos\omega t.$$

بنابراین:
$$BC=-\alpha\cot\frac{\omega l}{c_L}$$

و ارتعاش، با رابطه زیر داده می‌شود:
$$u_1(X_1,t)=\alpha\left[\cos\frac{\omega}{c_L}X_1-\frac{\sin\frac{\omega}{c_L}X_1}{\tan\frac{\omega}{c_L}l}\right]\cos\omega t.$$

(ب) تشدید، با تغییر مکانهای آزاد مشخص می‌شود. این امر، در بند (الف) برای فرکانسهای اجباری متناظر با $tg\omega l/C_L=0$ اتفاق می‌افتد، یعنی وقتی* $\omega=\frac{n\pi c_L}{l}, \quad n=1,2,3\ldots.$

مثال ۵-۱۲

(الف) ارتعاش برش - ضخامت یک ورق بی‌نهایت را پیدا کنید که به آن، اثر سطحی $\mathbf{t}=-(\beta\cos\omega t)\mathbf{e}_2$ روی صفحه $X_1=0$ واردمی‌شود و در صفحه $X_1=l$ ثابت شده است.

حل: (الف) اثر روی $X_1=0$ تنش $T_{12}]_{x_1=0}=\beta\cos\omega t$ را محاسبه می‌کند. این تنش برشی، ارتعاشی به شکل زیر را تحمیل می‌کند:
$$u_2=(A\cos\lambda X_1+B\sin\lambda X_1)(C\cos c_T\lambda t+D\sin c_T\lambda t).$$

با استفاده از قانون هوک داریم:
$$T_{12}\Big]_{X_1=0}=\mu\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\Big]_{X_1=0}=\beta\cos\omega t$$

یا
$$\frac{\beta}{\mu}\cos\omega t=\lambda BC\cos c_T\lambda t+\lambda BD\sin c_T\lambda t.$$

بنابراین:
$$\lambda=\frac{\omega}{c_T}, \quad D=0, \quad \text{and } BC=\frac{\beta c_T}{\omega\mu}.$$

شرط مرزی در $X_1=l$ می‌دهد:
$$u_2(l,t)=0=\left(AC\cos\frac{\omega l}{c_T}+\frac{\beta c_T}{\omega\mu}\sin\frac{\omega l}{c_T}\right)\cos\omega t.$$

بنابراین:
$$AC=-\frac{\beta c_T}{\omega\mu}\tan\frac{\omega l}{c_T}$$

---

* تذکر: این مقادیر ω، متناظر است با فرکانسهای ارتعاش آزاد طبیعی با دو وجه ثابت.

و
$$u_2(X_1, t) = \frac{\beta c_T}{\omega\mu}\left(\sin\frac{\omega}{c_T}X_1 - \tan\frac{\omega l}{c_T}\cos\frac{\omega}{c_T}X_1\right)\cos\omega t.$$

(ب) تشدید به ازای
$$\tan\frac{\omega l}{c_T} = \infty$$

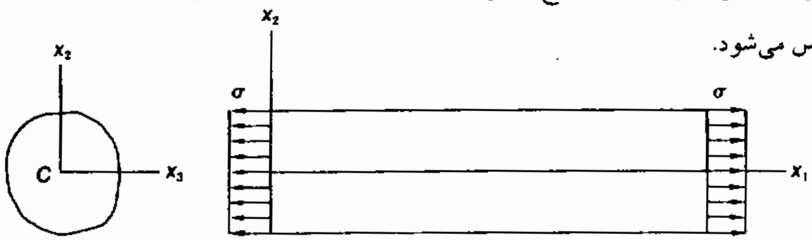
یا*
$$\omega = \frac{n\pi c_T}{2l}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

رخ می‌دهد.

۵-۸ - مثالهایی از مسائل الاستواستاتیک

الف .کشش ساده

یک میله الاستیک استوانه‌ای - با سطح مقطع دلخواه - در معرض وجوه انتهایی خود، در معرض اثر عمودی σ قرار گرفته است. سطح جانبی میله، عاری از هرگونه اثر سطحی است و نیروی حجمی، صفر فرض می‌شود.



شکل ۵-۶

به طور حسی و ضمنی، انتظار می‌رود که حالت تنش در هر نقطه، مستقل از طول میله و نیز بعد جانبی آن باشد.* به عبارت دیگر، حالت تنش، درهر جای میله، یکسان است. با در نظر گرفتن نقاط روی سطح مرزی، می‌توان نتیجه گرفت که مولفه‌های تنش عبارت اند از:

$$T_{11} = \sigma, \quad T_{22} = T_{33} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0. \qquad (۵-۲۹)$$

حال، نشان خواهیم داد که این نتیجه، یک حل ممکن است.

(I) تمامی معادلات تعادل $\partial T_{ij}/\partial X_j = 0$ ارضا می‌شود.

(II) واضح است که شرط مرزی، روی وجوه انتهایی ارضا می‌شود. روی سطح جانبی:

$$\mathbf{n} = 0\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$$

---

* تذکر: این مقادیر ω، متناظر با فرکانسهای طبیعی ارتعاش آزادی است که یک وجه آن بدون بردار اثر و وجه دیگر آن ثابت می‌باشد.

* در حالت $\sigma < 0$، فرض می‌شود که کمانش buckling رخ نمی‌دهد.

و
$$\mathbf{t} = \mathbf{Tn} = n_2(\mathbf{Te}_2) + n_3(\mathbf{Te}_3) = n_2(\mathbf{0}) + n_3(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

بنابراین، شرط اثر صفر نیز ارضا می‌شود.

(III) به علت ثابت بودن مولفه‌های تنش، مولفه‌های کرنش نیز ثابت می‌باشند. شرایط سازگاری، به طور خودکار ارضا میشود. در حقیقت:

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y}[T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] = \frac{\sigma}{E_Y}, \tag{۵-۳۰ الف}$$

$$E_{22} = \frac{1}{E_Y}[T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})] = -\nu\frac{\sigma}{E_Y}, \tag{۵-۳۰ ب}$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_Y}[T_{33} - \nu(T_{22} + T_{11})] = -\nu\frac{\sigma}{E_Y}, \tag{۵-۳۰ پ}$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0,$$

و به سادگی اثبات می‌شود که میدان تغییر مکان پیوسته منحصر به فرد زیر، متناظر با میدان کرنش معادله (۵ - ۳۰) می‌باشد:

$$u_1 = \left(\frac{\sigma}{E_Y}\right)X_1, \quad u_2 = -\left(\frac{\nu\sigma}{E_Y}\right)X_2, \quad u_3 = -\left(\frac{\nu\sigma}{E_Y}\right)X_3. \tag{۵-۳۱}$$

بدین ترتیب حل مسئله کشش یا فشار ساده کامل شده است.

اگر مساحت سطح مقطع A ثابت باشد، اثر سطحی σ روی هر وجه انتهایی، منجر به نیروی زیر می‌شود:

$$P = \sigma A \tag{۵-۳۲}$$

که از مرکز ثقل سطح[55] می‌گذرد.* بنابراین، مولفه‌های تنش در میله، برحسب P و A چنین می‌شوند:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{P}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۵-۳۳}$$

---

55 - centroid of the area

* اگر (y_p, z_p) نشانگر خط اثر p باشد، آن گاه $y_p = (\int y\sigma d_A)/p = (\int y d_A)/A = y_c$ و به طور مشابه: $Z_p = Z_c$.

چون ماتریس قطری است، با توجه به فصل ۲، تنشهای اصلی عبارت اند از: $0,0,P/A$ بنابراین، تنش عمودی حداکثر عبارت است از:

$$(T_n)_{\max} = \frac{P}{A}, \tag{۵-۳۴}$$

که روی ضخامت سطح مقطع وارد می‌شود و تنش برشی حداکثر عبارت است از:

$$(T_s)_{\max} = \frac{P}{2A}. \tag{۵-۳۵}$$

و روی صفحاتی که با صفحه عمودیِ سطح مقطع زاویه $45°$ می‌سازد، وارد می‌شود.

فرض کنید که طول اولیه میله l و افزایش طول آن Δl باشد. از معادله (۵ ـ ۳۱) و معادله (۵ ـ ۳۲) داریم:

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE_1}. \tag{۵-۳۶}$$

همچنین، اگر d طول خطی در جهت عرضی باشد، افزایش طول Δl با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\Delta d = -\frac{\nu P d}{AE_Y}. \tag{۵-۳۷}$$

علامت نفی، نشاندهندهٔ انقباض بُعد جانبی مورد انتظار، برای یک میله تحت کشش می‌باشد.

در واقع وقتی میله‌ای کشیده می‌شود، طبیعت واقعی توزیع اثر سطحی اغلب نامعلوم، و تنها برآیند نیرو معلوم است. سئوالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود، این است که تحت چه شرایطی، یک حل الاستیسیته (نظیر آن چه که هم اکنون برای کشش ساده به دست می‌آوردیم) برای مسائل واقعی قابل اعمال است. جواب این سئوال توسط اصل سنت ونان[۵۷] به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر نیروهای وارده بر بخشی از سطح یک جسم، با نیروهای متفاوت روی همان سطح جایگزین شود، آن گاه اثرات دو توزیع مختلف (روی بخشهایی از جسم که به قدر کافی از ناحیه اعمال نیروها دور باشند) الزاماً یکسان خواهد بود، به شرط آن که دو توزیع، دارای برآیند نیرو و برآیند گشتاور یکسان باشند.

اعتبار این اصل را می‌توان در زمانهای مشخص و با احراز شرایط کافی نمایش داد. تنها، خاطر نشان می‌سازیم که در اغلب حالتها، ثابت شده است که این اصل با آزمایش توافق زیادی دارد.

57 - Saint - Venant principle .

با استفاده از اصل سنت و نان، اینک پاسخ حاصل از کشش ساده را حداقل برای قسمتهای عمدهٔ یک میله لاغر معتبر می‌دانیم، به شرط آن که برآیند نیرو روی هرکدام از دو انتها، از مرکز سطح بگذرد.

مثال ۵-۱۳

یک میله فولادی، به طول $2ft\ (0.61m)$ و شعاع $1in\ (2.54cm)$ توسط نیروی محوری p در دو انتها کشیده می‌شود. تنشهای حداکثر عمودی و برشی را اگر $p=10000\ lb(44.48\ KN)$ باشد، بیابید.

$$E_Y = 30 \times 10^6 \text{ psi } (207 \text{ GPa}),\ \nu = 0.3$$

حل: تنش عمودی حداکثر، تنش برشی حداکثر و افزایش طول کل، به ترتیب برابر با:

$$(T_n)_{\max} = \frac{P}{A} = \frac{10{,}000}{\pi} = 3180 \text{ psi. } (21.93 \text{ MPa}).$$

$$(T_s)_{\max} = \frac{3180}{2} = 1590 \text{ psi. } (10.96 \text{ MPa}).$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE_Y} = \frac{(10{,}000)\ (2 \times 12)}{\pi(30 \times 10^6)} = 2.54 \times 10^{-3} \text{ in. } (64.5\ \mu\text{m}).$$

و قطر به اندازهٔ زیر جمع می‌شود:

$$-\Delta d = \frac{\nu P}{EA} d = \frac{(0.3)\ (10{,}000)\ (2)}{(30 \times 10^6)\ (\pi)} = 0.636 \times 10^{-4} \text{ in. } (1.61\ \mu\text{m}).$$

مثال ۵-۱۴

میله مرکبی، متشکل از دو میلهٔ نازک - به طول و مساحت سطح مقطع یکسان - توسط نیروی محوری p مطابق شکل (۵-۷) بارگذاری شده است. اگر مدول یانگ در قسمت $E_Y{}^1$ و $E_Y{}^2$ باشد، توزیع نیروی وارده بین دو نیمه را بیابید.

حل: از تنها معادلهٔ غیر صفر برای تعادل استاتیکی داریم:

$$P = P_1 - P_2. \qquad \text{(الف)}$$

استاتیک به تنهایی توزیع نیروی p را به دست نمی‌دهد (یک مسئله نامعین به لحاظ استاتیکی)، بنابراین، باید تغییر شکل ناشی از بار p را در نظر بگیریم. در این مسئله، افزایش طول برای کل میله مرکب وجود ندارد، لذا

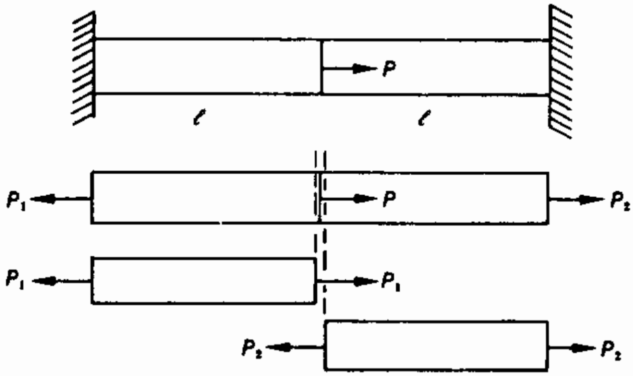
$$\frac{P_1 l}{AE_Y{}^1} + \frac{P_2 l}{AE_Y{}^2} = 0. \qquad \text{(ب)}$$

از ترکیب معادلات (الف) و (ب) به دست می‌آید:

$$P_1 = \frac{P}{1 + (E_Y{}^2/E_Y{}^1)}, \quad P_2 = \frac{-P}{1 + (E_Y{}^1/E_Y{}^2)}.$$

اگر به طور خاص، مدولهای یانگ برابر (فولاد) $E_y^1=207Gpa$ و (آلومینیم) $E_y^2=69Gpa$ باشند، آن گاه:

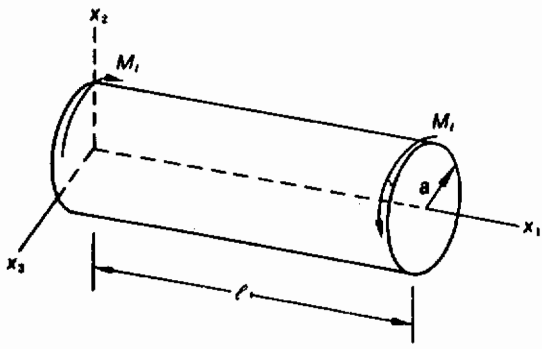
$$P_1=\frac{3P}{4}, \quad P_2=\frac{-P}{4}.$$



شکل ۵-۷

ب - پیچش یک استوانه مدور

تغییر شکل یک میله استوانه‌ای با سطح مقطع مدور (به شعاع a و طول l) را در نظر بگیرید، که توسط ممانهای یکسان M_t و در جهت مخالف در دو انتها پیچیده می‌شود (شکل ۵-۸ را ببینید). محور x_1 بر محور استوانه منطبق شده و وجوه چپ و راست، به ترتیب متناظر با صفحات $x_1=0$ و $x_1=l$ می‌باشند.



شکل ۵-۸

با توجه به تقارن مسئله، این فرض قابل قبول است که حرکت هر صفحهٔ سطح مقطع ناشی از اعمال

ممانهای انتهایی - یک چرخش جسم صلب، حول محور x_1 باشد. این حرکت، نظیر حرکت مجموعه‌ای از سکه‌های چیده شده است که در آن، هر سکه، با زاویه‌ای کمی متفاوت با سکه قبل می‌چرخد. هدف این بخش، نمایش آن است که برای یک سطح مقطع مدور، این فرض تغییر شکل، منجر به یک حل حقیقی در محدوده تئوری خطی الاستیسیته می‌شود.

زاویه چرخش کوچک را با θ نشان داده، میدان تغییر مکان متناظر را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{u} = (\theta \mathbf{e}_1) \times \mathbf{R} = (\theta \mathbf{e}_1) \times (X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3) = \theta(X_2\mathbf{e}_3 - X_3\mathbf{e}_2)$$

یا

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\theta X_3, \quad u_3 = \theta X_2, \qquad (۳۸-۵)$$

که $\theta = \theta(X_1)$

متناظر با این میدان تغییر مکان، کرنشهای غیر صفر عبارت اند از:

$$E_{12} = E_{21} = -\frac{1}{2} X_3 \frac{d\theta}{dX_1}, \qquad (۳۹-۵ \text{ الف})$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2} X_2 \frac{d\theta}{dX_1}. \qquad (۳۹-۵ \text{ ب})$$

مولفه‌های غیر صفر تنش عبارت اند از:

$$T_{12} = T_{21} = -\mu X_3 \frac{d\theta}{dX_1}, \qquad (۴۰-۵ \text{ الف})$$

$$T_{13} = T_{31} = \mu X_2 \frac{d\theta}{dX_1}. \qquad (۴۰-۵ \text{ ب})$$

برای تعیین این که این یک حالت تنش ممکن است یا خیر، معادلات تعادل ($\partial T_{ij}/\partial x_j=0$) را بررسی می‌کنیم. اولین معادله دقیقاً ارضا می‌شود، حال آن که برای معادلات دوم و سوم داریم:

$$-\mu X_3 \left(\frac{d^2\theta}{dX_1^2}\right) = 0,$$

$$+\mu X_2 \left(\frac{d^2\theta}{dX_1^2}\right) = 0.$$

بنابراین:

$$\frac{d\theta}{dX_1} \equiv \theta' = \text{constant}. \qquad (۴۱-۵)$$

از لحاظ فیزیکی، اگر نمو در چرخشِ زاویه‌ای (یعنی پیچش بر واحد طول) ثابت باشد ما تعادل را ارضا می‌کنیم. حال که نشان دادیم میدان تغییر مکان، یک میدان تنش ممکن را ایجاد می‌کند، باید اثرات سطحی متناظر با میدان تنش را محاسبه کنیم.

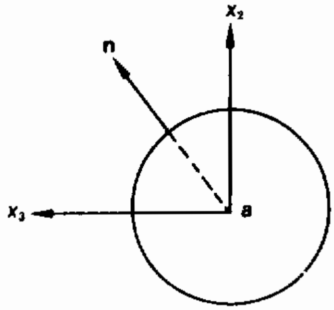
روی سطح جانبی (شکل ۵-۹ را ببینید) ما یک بردار یکه عمود $\mathbf{n}=(1/a)(X_2\mathbf{e}_2+X_3\mathbf{e}_3)$ را داریم. بنابراین، اثر سطحی روی سطح جانبی برابر است با:

$$[\mathbf{t}]=[\mathbf{T}]\,[\mathbf{n}]=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0 & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & 0 & 0\\ T_{31} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}X_2T_{12}+X_3T_{13}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

با جایگزینی از معادلات (۵-۴۰) داریم:

$$\mathbf{t}=\frac{\mu}{a}\left(-X_2X_3\theta'+X_2X_3\theta'\right)\mathbf{e}_1=0.$$

بنابراین، در توافق با این که میله تنها توسط ممانهای انتهایی می‌پیچد، سطح جانبی بدون اثر می‌باشد.



شکل ۵-۹

روی وجه $x_1=l$ ما بردار یکه $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1$ را داریم و اثر سطحی برابر است با:

$$\mathbf{t}=\mathbf{T}\mathbf{e}_1=T_{21}\mathbf{e}_2+T_{31}\mathbf{e}_3.$$

این توزیع اثر سطحی، روی وجه انتهایی، منجر به برآیند زیر می‌شود (شکل ۵-۱۰)

$$R_1=\int T_{11}\,dA=0,$$

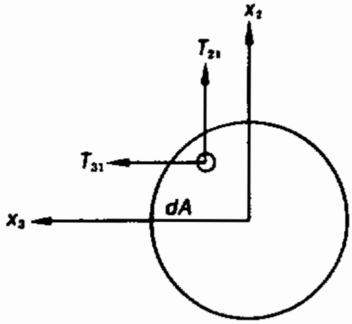
$$R_2=\int T_{21}\,dA=-\mu\theta'\int X_3\,dA=0,$$

$$R_3=\int T_{31}\,dA=\mu\theta'\int X_2\,dA=0,$$

$$M_1 = \int (X_2 T_{31} - X_3 T_{21})\, dA = \mu\theta' \int (X_2^2 + X_3^2)\, dA = \mu\theta' I_p,$$

$$M_2 = M_3 = 0,$$

که در آن، I_p ممان اینرسی قطبی مساحت سطح مقطع است و برای دایره‌ای به شعاع a برابر $I_p=\pi a^4/2$ می‌باشد.



شکل ۵ - ۱۰

برآیند نیرو، روی وجه $x_1=0$، به طور مشابه منجر به یک گشتاور موازنه کننده $-\mu\theta' I_p$ می‌شود. بنابراین، برآیند نیرو روی هرکدام از وجوه، یک گشتاور پیچشی $M_1=Mt$ است و پیچش بر واحد طول زیر را ایجاد می‌کند:

$$\theta' = \frac{M_t}{\mu I_p}. \tag{۴۲-۵}$$

و این، همان گونه که در بخش ۵ - ۱ نشان داده شد، بیانگر آن است که می‌توانیم مدول برشی را از یک آزمایش پیچش ساده به دست آوریم.

تانسور تنش برحسب گشتاور پیچشی M_t برابر است با:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{M_t X_3}{I_p} & +\dfrac{M_t X_2}{I_p} \\ -\dfrac{M_t X_3}{I_p} & 0 & 0 \\ +\dfrac{M_t X_2}{I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۴۳-۵}$$

در واقع وقتی میله‌ای می‌پیچد، توزیع حقیقی نیروهای وارده، به ندرت - اگر نگوییم هرگز - معلوم است. فرض می‌کنیم تا وقتی برآیند نیروهای وارده - روی دو انتهای یک میله نازک - گشتاور M_t برابر

و در جهت مخالف است، حالت تنش داخل میله توسط معادله (۵-۴۳) بیان می‌شود.*

مثال ۵-۱۵

برای یک میله مدور تحت پیچش و به شعاع a (الف) مقدار و محل تنشهای عمودی و برشی حداکثر را در سراسر میله بیابید، (ب) جهات اصلی را در موقعیت $x_2=0$ و $x_3=a$ پیدا کنید.

حل: (الف) نخست تنشهای اصلی را به صورت تابعی از موقعیت - با حل معادله مشخصه - محاسبه کنیم:

$$\lambda^3-\lambda\left(\frac{M_t}{I_p}\right)^2(X_2^2+X_3^2)=0.$$

بنابراین، مقادیر اصلی درهر نقطه عبارت انداز:

$$\lambda=0 \quad \text{و} \quad \lambda=\pm\frac{M_t}{I_p}\sqrt{(X_2^2+X_3^2)}=\pm\frac{M_t r}{I_p},$$

که r فاصله، از محور میله می‌باشد.

در این حالت، مقدار تنش برشی و عمودی حداکثر - در هر نقطه - برابر و متناسب با فاصله r است. بنابراین، هر دوی تنش برشی و عمودی حداکثر، روی مرز، $r=a$، واقع می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$(T_n)_{max}=(T_s)_{max}=\frac{M_t a}{I_p}. \qquad (۴۴-۵)$$

(ب) برای مقدار اصلی $\lambda=M_t a/I_p$ در نقاط مرزی $(x_1,0,a)$ معادله مقدار ویژه خواهد شد:

$$-\frac{M_t a}{I_p}n_1-\frac{M_t a}{I_p}n_2=0,$$

$$-\frac{M_t a}{I_p}n_1-\frac{M_t a}{I_p}n_2=0,$$

$$-\left(\frac{M_t a}{I_p}\right)n_3=0.$$

بنابراین، بردار ویژه، توسط $\mathbf{n}=(\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$ داده می‌شود. این عمود، صفحه‌ای را به دست می‌دهد که عمود بر وجه جانبی، با محور آن زاویه $45°$ می‌سازد. به همین علت است که ترک در امتداد یک مارپیچ[۵۹] با شیب $45°$ (نسبت به محور یک شفت چدنی تحت پیچش، که اغلب در کشش ضعیفتر از برش است) اتفاق می‌افتد.

---

* اصل سنت ونان در این جا کاربرد دارد.

59 - helix

مثال ۵-۱۶

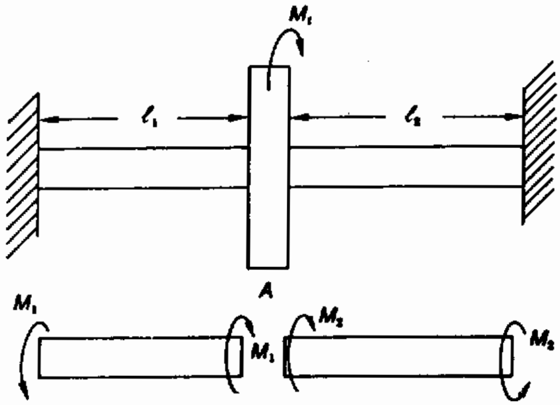
در شکل (۵-۱۱) گشتاور پیچشی M_t به دیسک صلب A وارد می‌شود. ممانهای پیچشی منتقله به محورهای مدور در دو طرف دیسک را به دست آورید.

حل: اگر M_1 ممان پیچشی منتقله به محور سمت چپ و M_2 مربوط به محور سمت راست باشد، آن گاه برای تعادل دیسک داریم:

$$M_1+M_2=M_t. \tag{الف}$$

علاوه براین، چون فرض شده که دیسک صلب است، زاویه پیچش محور طرف راست و طرف چپ باید برابر باشد:

$$\frac{M_1 l_1}{\mu I_p}=\frac{M_2 l_2}{\mu I_p}.$$



شکل ۵-۱۱

بنابراین

$$M_1 l_1=M_2 l_2. \tag{ب}$$

از معادلات (الف) و (ب) به دست می‌آید:

$$M_1=\left(\frac{l_2}{l_1+l_2}\right)M_t,\quad M_2=\left(\frac{l_1}{l_1+l_2}\right)M_t.$$

مثال ۵-۱۷

فرض کنید که زاویه پیچش یک استوانه مدور تحت پیچش، تابعی از X_1 و زمان t باشد، یعنی $\theta=\theta(X_1, t)$. (الف) معادلات دیفرانسیلی که θ باید (در غیاب نیروهای حجمی، به عنوان یک حل ممکن) ارضا کند، به دست آورید.

شرایط مرزی، که θ باید ارضاء کند، کدام‌اند. اگر (ب) صفحه $X_1=0$ یک انتهای ثابت باشد، (پ) صفحه $X_1=0$ یک انتهای آزاد باشد.

حل: (الف) از تغییر مکانهای $u_1 = 0,\quad u_2 = -\theta X_3,\quad u_3 = \theta X_2$

در می‌یابیم که تنشها به صورت زیراند:

$$T_{12} = T_{21} = 2\mu E_{12} = 2\mu E_{21} = -\mu X_3 \frac{\partial\theta}{\partial X_1},$$

$$T_{13} = T_{31} = 2\mu E_{13} = 2\mu E_{31} = \mu X_2 \frac{\partial\theta}{\partial X_1}.$$

و

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{23} = 0.$$

از دومی و سومین معادلات حرکت داریم:

$$-\mu X_3 \frac{\partial^2\theta}{\partial X_1^2} = -\rho_0 X_3 \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},$$

$$\mu X_2 \frac{\partial^2\theta}{\partial X_1^2} = \rho_0 X_2 \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}.$$

بنابراین $\theta(X_1, t)$ باید معادله زیر را ارضا کند:

$$c_T^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},$$

که در آن، $c_T = \sqrt{(\mu/\rho_0)}$

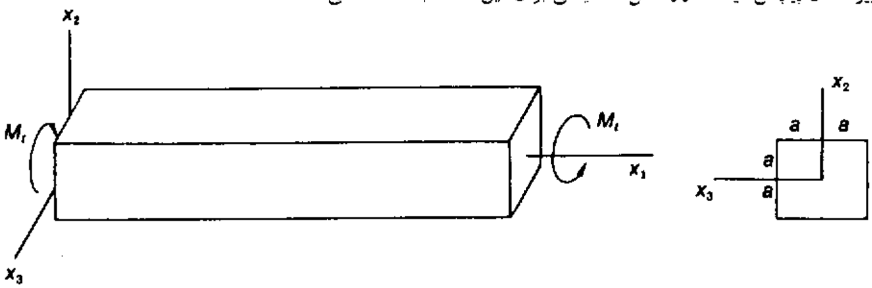
(ب) در انتهای ثابت $X_1=0$ هیچ گونه تغییر مکانی نیست، لذا $\theta(0, t) = 0.$

(پ) در انتهای بدون اثر (آزاد) $T_{21}|_{X_1=0} = 0,\ T_{31}|_{X_1=0} = 0$، پس $X_1 = 0,\ \mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = 0$. بنابراین:

$$\frac{\partial\theta}{\partial X_1}(0, t) = 0.$$

مثال ۵–۱۸

یک میله استوانه‌ای با سطح مقطع مربع (شکل ۵-۱۲ را ببینید) در اثر ممانهای انتهایی می‌پیچد. نشان دهید که میدان تغییر مکان پیچش میله مدور، حل صحیحی برای این مسئله به دست نمی‌دهد.



شکل ۵–۱۲

حل: تا هم اکنون نشان دادیم که میدان تغییر مکان پیچش استوانه‌های مدور، یک میدان تنش در حال تعادل ایجاد می‌کند. بنابراین، حذف اثر سطحی روی سطح جانبی را بررسی می‌کنیم. بردار یکه روی صفحه $X_3=a$ ، $\mathbf{e}_3$ می‌باشد، به طوری که اثر سطحی، برای تانسور تنش معادله (۵-۴۳) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{e}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 = \frac{M_t X_2}{I_p}\mathbf{e}_1.$$

به طور مشابه، اثرهای سطحی در جهت $\mathbf{e}_1$ - روی سطح جانبی باقیمانده - وجود خواهد داشت. بنابراین، میدان تغییر مکان فرض شدهٔ قبلی ، باید تغییر کند. برای یافتن پاسخ حقیقی پیچش خالص - ناشی از ممانهای انتهایی - باید به گونه‌ای اثرهای سطحی محوری را حذف کنیم. همان گونه که در بخش بعد خواهیم دید، این امر، منجر به واپیچش[۶۰] صفحات سطح مقطع می‌شود.

پ - پیچش استوانه غیر مدور

برای مقاطع غیر مدور، میدان تغییر مکان ساده (بخش۵-۸ ب) شرط مرزیِ سطح جانبی بدون اثر را ارضا نخواهد کرد (مثال ۵-۱۸ را ببینید). نشان خواهیم داد که برای ارضای این شرط مرزی،سطوح مقاطع، مسطح باقی نخواهند ماند.

میدان تغییر مکانی را فرض کنید که در آن، هر سطح مقطع، به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده، و تغییر مکانی در جهت محوری نیز وجود دارد. این واپیچش، با $u_1=\phi(X_2\ ,\ X_3)$ تعریف می‌شود. پس میدان تغییر مکان، اینک به شکل زیر است:

$$u_1 = \phi(X_2, X_3), \quad u_2 = -X_3\theta(X_1), \quad u_3 = X_2\theta(X_1). \qquad (۵-۴۵)$$

کرنشها و تنشهای غیر صفر مربوطه عبارت اند از:

$$T_{12} = T_{21} = 2\mu E_{12} = 2\mu E_{21} = -\mu X_3\theta' + \mu\frac{\partial\phi}{\partial X_2}, \qquad (۵-۴۶ \text{ الف})$$

$$T_{13} = T_{31} = 2\mu E_{13} = 2\mu E_{31} = \mu X_2\theta' + \mu\frac{\partial\phi}{\partial X_3}. \qquad (۵-۴۶ \text{ ب})$$

معادلات دوم و سوم تعادل، زمانی ارضا می‌شوند که ثابت $=\theta'$ باشد. به هر حال، نخستین معادله تعادل

60 - warp

نیازمند این است که

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial X_3^2}=0. \qquad (۴۷-۵)$$

بنابراین، میدان تغییر مکان معادله (۵-۴۵) اگر ϕ معادله (۵-۴۷) را ارضا کند - یک حالت تنش ممکن را ایجاد خواهد نمود. از آنجا که میله استوانه‌ای است، بردار یکه عمود بر سطح جانبی، به شکل $\mathbf{n}=n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3$ است و اثر سطحی مربوطه به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{t}=\mathbf{Tn}=\left\{\mu\theta'\left[-n_2X_3+n_3X_2\right]+\mu\left[\frac{\partial\phi}{\partial X_2}n_2+\frac{\partial\phi}{\partial X_3}n_3\right]\right\}\mathbf{e}_1.$$

ما نیاز داریم که سطح جانبی، بدون اثر سطحی باشد، یعنی $\mathbf{t}=0$. به طوری که روی مرز تابع ϕ باید شرط زیر را راضا کند:

$$\frac{d\phi}{dn}\equiv(\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}=\theta'[n_2X_3-n_3X_2]. \qquad (۴۸-۵)$$

معادلات (۵-۴۷) و (۵-۴۸) یک مسئله با مقدار مرزی[61] را تعریف می‌کند که یک حل حقیقی برای تابع ϕ را به دست خواهد داد. در اینجا، تنها پیچش یک سطح مقطع بیضوی با تابع پیچش

$$\phi=AX_2X_3 \qquad (۴۹-۵)$$

را بررسی می‌کنیم و نشان خواهیم داد که یک حل حقیقی را به دست می‌دهد.

A را ثابت فرض می‌کنیم، واضح است که این ϕ، معادله تعادل را ارضا می‌کند [معادله (۵-۴۷)]. برای بررسی شرط مرزی، با تعریف مرز بیضوی - به کمک معادله زیر - آغاز می‌کنیم:

$$f(X_2,X_3)=\frac{X_2^2}{a^2}+\frac{X_3^2}{b^2}=1.$$

بردار یکه عمود، بدین صورت داده می‌شود:

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{2}{|\nabla f|}\left[\frac{X_2}{a^2}\mathbf{e}_2+\frac{X_3}{b^2}\mathbf{e}_3\right]$$

و شرط مرزی معادله (۵-۴۸) خواهد شد:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_2}\right)b^2X_2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_3}\right)a^2X_3=\theta'X_2X_3(b^2-a^2).$$

---

61 - boundary - value problem

با قرار دادن ϕ در این معادله، به دست می‌آید:

$$A = \theta'\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right). \qquad (۵۰-۵)$$

چون A ثابت است، هر دو معادله (۵-۴۷) و (۵-۴۸) ارضا می‌شوند. با قرار دادن مقدار در معادله (۵-۴۶)، تنشهای مربوطه به دست می‌آید:

$$T_{21} = T_{12} = -\left(\frac{2\mu a^2}{a^2 + b^2}\right)\theta' X_3,$$

$$T_{31} = T_{13} = \left(\frac{2\mu b^2}{a^2 + b^2}\right)\theta' X_2.$$

این توزیع تنش، یک اثر سطحی روی وجه انتهایی $(X_1=l)$ به دست می‌دهد:

$$\mathbf{t} = T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3$$

و نیز برآیند نیروی زیر را داریم:

$$R_1 = R_2 = R_3 = M_2 = M_3 = 0,$$

$$M_1 = \int (X_2T_{31} - X_3T_{21})\, dA = \frac{2\mu\theta'}{a^2 + b^2}\left[a^2\int X_3^2 dA + b^2\int X_2^2 dA\right]$$

$$= \frac{2\mu\theta'}{a^2 + b^2}\left[a^2 I_{22} + b^2 I_{33}\right].$$

با نمایش $M_1=M_t$ و یادآوری این که برای یک بیضی $I_{33}=\pi a^3b/4$ و $I_{22}=\pi b^3a/4$ است، به دست می‌آید:

$$\theta' = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 \mu} M_t.$$

به طوری مشابه، برآیند نیروها روی وجه انتهایی دیگر $(X_1=0)$ منجر به یک گشتاور موازنه کننده می‌شود.

تانسور تنش برحسب ممان پیچشی خواهد شد:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2M_tX_3}{\pi ab^3} & \dfrac{2M_tX_2}{\pi a^3b} \\ \dfrac{-2M_tX_3}{\pi ab^3} & 0 & 0 \\ \dfrac{2M_tX_2}{\pi a^3b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵۱-۵)$$

مثال ۵-۱۹

برای یک میله استوانه‌ای بیضوی تحت پیچش (الف) مقدار تنش عمودی و برشی حداکثر را در هر نقطه از میله بیابید، و (ب) نسبت تنش برشی حداکثر را در دورترین نقاط محورهای کوچک و بزرگ بیضی پیدا کنید.

حل: (الف) نظیر مثال ۵-۱۲، نخست معادله مشخصه را حل می‌کنیم:

$$\lambda^3 - \lambda\left(\frac{2M_t}{\pi ab}\right)^2\left[\frac{X_2^2}{a^4}+\frac{X_3^2}{b^4}\right] = 0.$$

مقادیر اصلی عبارت‌اند از:

$$\lambda = 0 \quad \text{و} \quad \lambda = \pm\frac{2M_t}{\pi ab}\sqrt{\frac{X_2^2}{a^4}+\frac{X_3^2}{b^4}}.$$

که تنشهای عمودی و برشی حداکثر را به دست می‌دهد:

$$(T_s)_{max} = (T_n)_{max} = \frac{2M_t}{\pi ab}\sqrt{\frac{X_2^2}{a^4}+\frac{X_3^2}{b^4}}.$$

(ب) فرض می‌کنیم $b>a$، در انتهای محور کوچک $(X_2=a\ ,\ X_3=0)$ داریم:

$$(T_s)_{max} = \left(\frac{2M_t}{\pi ab}\right)\left(\frac{1}{a}\right)$$

و در انتهای محور بزرگ $(X_2=0\ ,\ X_3=b)$ داریم:

$$(T_s)_{max} = \left(\frac{2M_t}{\pi ab}\right)\left(\frac{1}{b}\right).$$

بنابراین، نسبت تنشهای حداکثر $\frac{b}{a}$ است و تنش بزرگتر، در انتهای محور کوچک اتفاق می‌افتد.

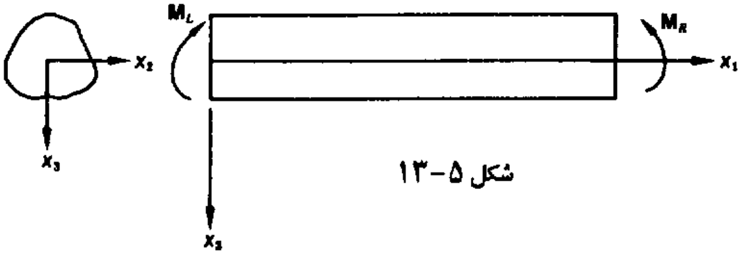
ت. خمش خالص یک تیر

تیر، میله‌ای است که روی آن، نیرو یا گشتاور - در یک صفحه محوری - وارد شده، و معمولا منجر به ایجاد خمش در میله می‌شود. هنگامی‌که یک تیر - یا بخشی از یک تیر - تحت فقط گشتاور انتهایی قرار می‌گیرد، گفته می‌شود که در خمش ساده یا خالص می‌باشد. ما حالتی را در نظر می‌گیریم که یک میله استوانه‌ای با سطح مقطع اختیاری، تحت خمش خالص باشد.

شکل ۵-۱۳ میله‌ای با سطح مقطع یکنواخت را نشان می‌دهد. محور X_1 طوری انتخاب می‌شود که از مراکز سطح مقطع بگذرد و $X_1=0$ و $X_1=l$ متناظر با وجوه چپ و راست میله باشند.

برای یافتن یک حل الاستیسیته خطی، برای این مسئله، باید یک حالت ممکن تنش را مشخص کنیم که متناظر باشد با یک سطح جانبی بدون اثر، و توزیع اثرهای سطحی عمودی محدود روی وجوه

انتهایی، که معادل گشتاورهای خمشی $\mathbf{M}_R=M_2\mathbf{e}_2+M_3\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{M}_L=-\mathbf{M}_R$ باشند (توجه کنید که مولفه $\mathbf{M}_1$ صفر می‌باشد، چرا که گشتاور، پیچشی است). با کمک گرفتن از حالت تنش مربوط به کشش ساده، برای امتحان، فرض می‌کنیم که T_{11} تنها مولفه غیرصفر تنش و نیز تابع اختیاری از X_i باشد.



شکل ۵-۱۳

ارضای تعادل، نیازمند آن است که: $\dfrac{\partial T_{11}}{\partial X_1}=0,$

یعنی $T_{11}=T_{11}(X_3 ، X_3)$.

کرنشهای متناظر عبارت‌اند از:

$$E_{11}=\frac{1}{E_Y}T_{11},\quad E_{22}=E_{33}=-\frac{\nu}{E_Y}T_{11},$$

$$E_{12}=E_{13}=E_{23}=0.$$

چون با یک فرض در مورد حالت تنش آغاز کردیم، بایدسازگاری کرنشها بررسی شود. با قرار دادن کرنشها در معادلات سازگاری (معادله ۳-۳۶) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial X_2^2}=0,\quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial X_3^2}=0,\quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial X_3\partial X_2}=0,$$

و این، تنهای زمانی ارضا می‌شود که T_{11} یک تابع خطی به شکل زیر باشد

$$T_{11}=\alpha+\beta X_2+\gamma X_3.$$

حال که یک توزیع ممکن تنش را در اختیار داریم، اجازه دهید طبیعت اثرهای مرزی را بررسی کنیم. نظیر حالت کشش ساده، واضح است که سطح جانبی بدون اثر می‌باشد. روی وجه انتهایی $X_1=l$، یک اثر سطحی داریم $\mathbf{t}=\mathbf{T}\mathbf{e}_1=T_{11}\mathbf{e}_1,$ که یک دستگاه برآیند نیرو می‌دهد*

* انتگرالهای $\int X_2 d_A$ و $\int X_3 d_A$ صفر هستند، چون هر دو، اولین ممان اینرسی مساحت، حول یک محور مرکز ثقل می‌باشند.

$$R_1 = \int T_{11} dA = \alpha \int dA + \beta \int X_2 dA + \gamma \int X_3 dA = \alpha A,$$

$$R_2 = R_3 = 0,$$

$$M_1 = 0,$$

$$M_2 = \int X_3 T_{11} dA = \alpha \int X_3 dA + \beta \int X_2 X_3 dA + \gamma \int X_3^2 dA$$
$$= \beta I_{23} + \gamma I_{22},$$

$$M_3 = -\int X_2 T_{11} dA = -\alpha \int X_2 dA - \beta \int X_2^2 dA - \gamma \int X_2 X_3 dA$$
$$= -\beta I_{33} - \gamma I_{23},$$

که A مساحت سطح مقطع، I_{22}، I_{33}، I_{23} ممانها و حاصلضرب اینرسی مساحت سطح مقطع هستند. روی وجه $X_1=0$، برآیند نیرو، برابر و در جهت مخالف آن چه که در فوق داده شد، می‌باشد.

توجه کنید که در معادلات فوق، برآیند نیرو $\mathbf{R}=R_1\mathbf{e}_1$ از مرکز ثقل سطح مقطع می‌گذرد و اثر آن - کشش ساده - را می‌توان با اثر خمش بر هم نهاد، بنابراین $\alpha=0$ می‌گیریم. توجه کنید که اگر میله، توسط نیروی محوری بارگذاری شود که با مرکز ثقل سطح منطبق نباشد، می‌توان آن را جایگزین یک گشتاور خمشی و یک نیروی محوری معادل (که از مرکز ثقل سطح مقطع می‌گذرد) نمود.

حال بدون آن که کلیت مسئله را از دست بدهیم، فرض می‌کنیم که محورهای X_2 و X_3 طوری انتخاب شده‌اند که بر محورهای اصلی مساحت سطح مقطع منطبق می‌شوند (یعنی در امتداد خطوط تقارن) به طوری که $I_{33}=0$. در این حالت، توزیع تنش برای میله استوانه‌ای، با رابطه زیر داده می‌شود:

$$T_{11} = \frac{M_2}{I_{22}} X_3 - \frac{M_3}{I_{33}} X_2 \tag{۵-۵۲}$$

و مولفه‌های دیگر $T_{ij}=0$ هستند.

برای تحقیق پیرامون طبیعت تغییر شکلِ ناشی از ممانهای خمشی، برای سادگی مطلب فرض می‌شود $M_3=0$. کرنشهای متناظر عبارت‌اند از:

$$E_{11} = \frac{M_2}{I_{22} E_Y} X_3, \tag{۵-۵۳ الف}$$

$$E_{22} = E_{33} = -\frac{\nu M_2}{I_{22} E_Y} X_3. \tag{۵-۵۳ ب}$$

این معادلات را می‌توان انتگرال‌گیری نمود (چون کرنشها سازگارند، از این امر مطمئن هستیم) تا میدان تغییر مکان زیر را به دست آورد:

$$u_1=\frac{M_2}{E_Y I_{22}}X_1X_3-\alpha_3X_2+\alpha_2X_3+\alpha_4,$$

$$u_2=-\frac{\nu M_2}{E_Y I_{22}}X_2X_3+\alpha_3X_1-\alpha_1X_3+\alpha_5,$$

$$u_3=-\frac{M_2}{2E_Y I_{22}}[X_1^2-\nu(X_2^2-X_3^2)]-\alpha_2X_1+\alpha_1X_2+\alpha_6,$$

که α_iها ثابتهای انتگرال‌گیری می‌باشند. در حقیقت α_4، α_5، α_6 در حالت کلی یک جابجایی[63] میله صلب را تعریف می‌کنند و α_1، α_2، α_3 قسمتهای ثابت بخش پاد متقارن گرادیان تغییر مکان هستند، که در حالت کلی یک چرخش جسم صلب را تعریف می‌کنند. برای سهولت، فرض می‌کنیم $\alpha_i=0$ [توجه کنید که این فرض متناظر با نیاز ما به $u=0$ و $(\nabla\mathbf{u})^A=0$ در مبدأ می‌باشد]. بنابراین، تغییر مکانها عبارت‌اند از:

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\frac{M_2}{E_Y I_{22}}X_1X_3,\quad u_2=-\frac{\nu M_2}{E_Y I_{22}}X_2X_3\\u_3&=-\frac{M_2}{2E_Y I_{22}}[X_1^2-\nu(X_2^2-X_3^2)].\end{aligned}\right\}\tag{۵۴-۵}$$

صفحهٔ سطح مقطع ثابت $X_1=$ را در نظر بگیرید، ملاحظه می‌کنید که تغییر مکان عمود بر صفحه، توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$u_1=\left(\frac{M_2X_1}{E_Y I_{22}}\right)X_3.$$

از آن جا که u_1 تابعی خطی از X_3 می‌باشد، صفحه سطح مقطع مسطح باقی مانده، حول محور X_2 به اندازه زاویه زیر می‌چرخد (شکل ۵-۱۴ را ببینید)

$$\theta\approx\tan\theta=\frac{+u_1}{X_3}=\frac{M_2X_1}{E_Y I_{22}}.$$

علاوه‌براین، تغییر مکان ماده‌ای که نخست در امتداد محور X_1 قرار داشته $(X_2=X_3=0)$ را در نظر بگیرید:

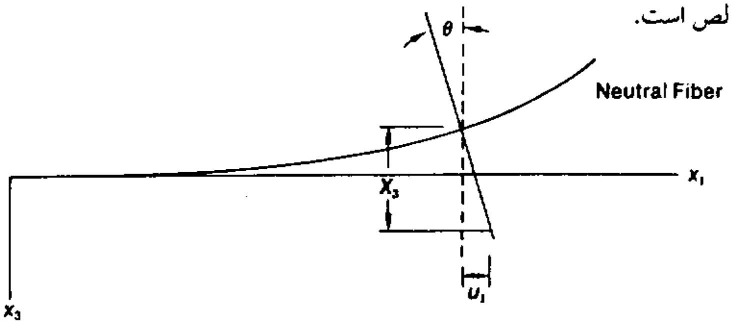
63 - translation

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = -\frac{M_2 X_1^2}{2E_Y I_{22}} \qquad (۵۵-۵)$$

تغییر مکان این المان مادی (اغلب محور خنثی یاتارخنثی خوانده می‌شود)اغلب برای تعریفِ خیز تیر به کار می‌رود. توجه کنید که چون

$$\left|\frac{du_3}{dX_1}\right| = \frac{M_2 X_1}{E_Y I_{22}} = \tan\theta$$

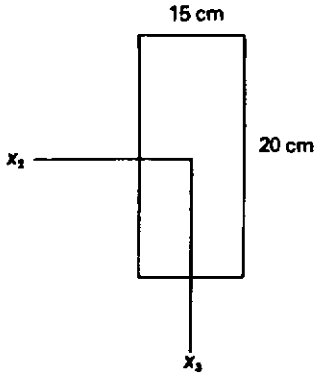
صفحات سطح مقطع، عمود بر محور خنثی باقی می‌مانند. این نتیجه واضحو به علت غیبت تنش برشی در خمش خالص است.



شکل ۵-۱۴

مثال ۵-۲۰

در شکل ۵-۱۵، تیر مستطیل شکلی به عرض ۱۵ cm و ارتفاع ۲۰ cm تحت خمش خالص قرار گرفته است. گشتاور دست راست $M = 7000 e_2$ $N.m$ می‌باشد. تنشهای عمودی و برشی حداکثر را در تیر بیابید.



شکل ۵-۱۵

64 - neutral axis

حل: داریم

$$T_{11}=\frac{M_2}{I_{22}}X_3$$

و مولفه‌های دیگر تنش صفر می‌باشند. بنابراین، در هر نقطه:

$$(T_n)_{max}=\frac{M_2}{I_{22}}X_3$$

و

$$(T_s)_{max}=\frac{M_2X_3}{2I_{22}}.$$

مقدار حداکثر، در مرز خواهد بود، یعنی $X_3=10^{-1}m$. برای به دست آوردن یک جواب عددی، داریم:

$$I_{22}=\tfrac{1}{12}(15\times 10^{-2})(20\times 10^{-2})^3=10^{-4}\ \mathrm{m}^4$$

و تنشهای حداکثر عبارت‌اند از :

$$(T_n)_{max}=\frac{(7000)\,(10^{-1})}{10^{-4}}=7\times 10^6\ \mathrm{Pa}.$$

$$(T_s)_{max}=3.5\times 10^6\ \mathrm{Pa}$$

مثال ۵-۲۱

برای تیر مثال ۵-۲۰، اگر ممان دست راست، $M=7000(e_2+e_3)\ N.m$ باشد، تنش عمودی حداکثر را بیابید.

حل: داریم

$$I_{33}=0.563\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^4,\quad I_{22}=10^{-4}\ \mathrm{m}^4$$

$$T_{11}=\frac{M_2X_3}{I_{22}}-\frac{M_3}{I_{33}}X_2=(7X_3-12.4X_2)\times 10^1\ \mathrm{Pa}$$

تنش عمودی حداکثر در $X_2=-7.5\times 10^{-2}m$ و $X_3=10^{-1}m$ واقع می‌شود، مقدار آن برابر است با:

$$T_{11}=16.3\ \mathrm{MPa}.$$

ث -کرنش صفحه‌ای

اگر تغییر شکل یک جسم استوانه‌ای، به گونه‌ای باشد که هیچگونه مولفه محوری تغییر مکان وجود نداشته باشد و هیچ مؤلفه‌ای وابسته به مختص محوری نباشد، آن گاه گفته می‌شود که جسم در یک حالت کرنش صفحه‌ای قرار دارد. فرض کنید که جهت e_3 متناظر با محور استوانه باشد، داریم:

$$u_1=u_1(X_1,X_2),\quad u_2=u_2(X_1,X_2),\quad u_3=0.$$

این تغییر مکانها مربوط به مولفه‌های غیر صفر کرنش می‌باشند:

$$E_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1},\quad E_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial X_2},\quad E_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right).$$

مولفه‌های غیر صفر تنش متناظر عبارت‌اند از T_{11}، T_{22}، T_{12}، T_{33}. توجه کنید که تنش عمودی T_{33} برای حفظ $E_{33}=0$ به صورت $T_{33}=\nu(T_{11}+T_{22})$ داده می‌شود، و تابع X_3 نیست.

یک میدان تنش استاتیکی را - در غیاب نیروهای حجمی - در نظر بگیرید، معادلات تعادل تقلیل می‌یابند به

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial X_2}=0,$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial X_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial X_2}=0,$$

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial X_3}=0.$$

چون $T_{33}=T_{33}(X_1,X_2)$ است، معادله تعادل سوم به وضوح ارضا می‌شود. برای سهولت، می‌توانیم با معرفی "تابع تنش ایری"[۶۵]، $\phi(X_1,X_2)$ تعداد معادلات را از دو، به یک تقلیل دهیم، به گونه‌ای که

$$T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial X_2^2},\quad T_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial X_1\partial X_2},$$
$$T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial X_1^2},\quad T_{33}=\nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial X_2^2}\right). \tag{۵۶-۵}$$

برای $\phi(X_1,X_2)$ اختیاری، به سادگی می‌توان اثبات نمود که معادلات تعادل به طور خودکار ارضا می‌شوند. چون مسئله برحسب تنش است، باید معادلات سازگاری را بررسی کنیم. برای کرنش صفحه‌ای تنها معادله‌ای که به وضوح ارضا نمی‌شود عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2}=2\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1\partial X_2}.$$

با محاسبه کرنشها - به کمک قانون هوک - برحسب ϕ و قرار دادن آنها در معادله فوق، در می‌یابیم که ϕ باید معادله دیفرانسیل زیر را ارضا کند:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X_1^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial X_1^2\partial X_2^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial X_2^4}=0. \tag{۵۷-۵}$$

65 - Airy stress function

بنابراین، هر $\phi(X_1 ،X_2)$ که معادله (۵ - ۵۷) ار ارضا کند، یک حل الاستیک ممکن خواهد بود. به خصوص این که از هر چند جمله‌ای درجه سه (که یک میدان تنش و کرنش خطی به وجود می‌آورد) می‌توان سود جست.

مثال ۵-۲۲

حالت تنش زیر داده شده است:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(X_1, X_2) \end{bmatrix}.$$

نشان دهید که عمومی‌ترین شکل $G(X_1 ،X_2)$ که منجر به یک حالت تنش ممکن - در غیاب نیروی حجمی - می‌شود، عبارت است از:

$$G(X_1, X_2) = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma.$$

حل: مولفه‌های کرنش عبات‌اند از:

$$E_{11} = -\frac{\nu}{E_0} G(X_1, X_2) = E_{22},$$

$$E_{33} = \frac{1}{E_0} G(X_1, X_2),$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0.$$

از شرایط سازگاری [معادله (۳-۳۶)] داریم:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial X_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial X_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial X_1 \partial X_2} = 0.$$

بنابراین $G(X_1 ،X_2)=\alpha X_1+\beta X_2+\gamma$. واضح است که در غیاب نیروی حجمی، معادلات تعادل ارضا می‌شوند.

مثال ۵-۲۳

تابع تنش زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(X_1, X_2) = \frac{\beta}{6} X_2^3.$$

(الف) تنشها را برای حالت کرنش صفحه‌ای به دست آورید: (ب) اگر تنشهای بند (الف) داخل یک منشور مستطیلی (محدود شده توسط $X_1=0$ ،$X_1=l$ ،$X_2=\pm(h/2)$ ، $X_3=\pm(b/2)$) باشند، اثرهای سطحی روی مرزها را پیدا کنیدو (پ) اگر سطوح مرزی $X_3=\pm(b/2)$ بدون اثر باشند، پاسخ را بیابید.

حل: (الف) از معادله (۵-۵٦)

$$T_{11} = \beta X_2, \quad T_{22} = 0, \quad T_{33} = G(X_1, X_2) = \nu\beta X_2,$$

$$T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

(ب)

روی وجه $X_1=0$ داریم $X_1 = 0, \mathbf{t} = \mathbf{T}(-\mathbf{e}_1) = -\beta X_2 \mathbf{e}_1$

روی وجه $X_1=p$ داریم $X_1 = l, \mathbf{t} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \beta X_2 \mathbf{e}_1$

روی وجه $X_2=\pm h/2$ داریم $X_2 = \pm (h/2), \mathbf{t} = \mathbf{T}(\pm \mathbf{e}_2) = 0$

روی وجه $X_3=\pm b/2$ داریم $X_3 = \pm (b/2), \mathbf{t} = \mathbf{T}(\pm \mathbf{e}_3) = \pm \nu\beta X_2 \mathbf{e}_3$

(پ) از مثال قبل، دیده می‌شود که حالت تنش

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G(X_1, X_2) \end{bmatrix},$$

که $G(X_1 ,X_2)=\nu\beta X_2$ (خطی برحسب X_2 و X_1) یک حالت تنش ممکن است. اگر این حالت تنش را با حالت بند (الف) جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \beta X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

که برای ایجاد آن، نیازی به اثر سطحی روی $X_3=\pm(b/2)$ نیست. توجه کنید که این، یک حل کامل برای خمش خالص - با بردارهای ممان موازی جهت $\mathbf{e}_3$ - می‌باشد.

حالت تنش با $T_{33}=T_{31}=T_{32}=0$ یعنی:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

حالت تنش صفحه‌ای[66] خوانده می‌شود. برای این که حالت تنش صفحه‌ای یک حل کامل برای یک مسئله الاستیسیته باشد، به طور کلی لازم است که T_{11}، T_{12}، T_{22} وابسته به X_3 باشند. اگر این مولفه‌های تنش، مستقل از X_3 باشند، آن گاه حالت تنش، تنها زمانی ممکن است که $T_{11}+T_{22}$ تابع خطی از X_1 و X_2 شود. [مثالهای (۵-۲۲) و (۵-۲۳) راببینید].

66 - plane stress

مثال ۵-۲۴

تابع تنش $\phi=\alpha X_1X_2^3+\beta X_1X_2$ را در نظر بگیرید.

(الف) آیا این تابع تنش مجاز است؟

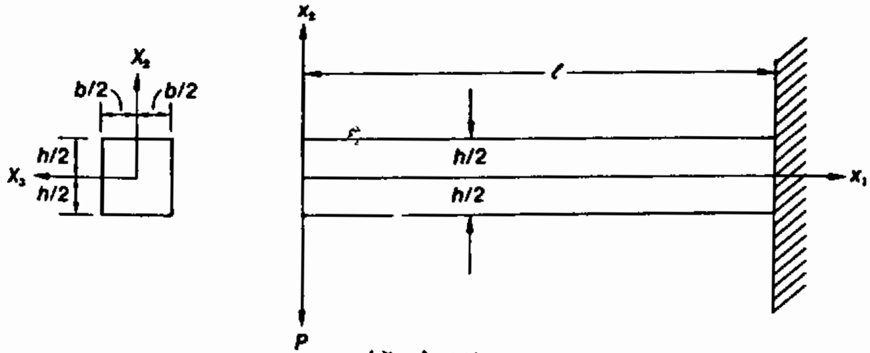
(ب) تنشهای مربوطه را به دست آورید. (حالتن تنش در صفحه)

(پ) مطلوب است α و β برای این که تابع فوق، حلی بر مسئله تیر یکسر گیردار با نیروی انتهایی P باشد (شکل ۵-۱۶). هر دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را مورد بحث قرار دهید.

حل: (الف) بله، معادله (۵-۵۷) ارضا می‌شود.

(ب)

$$T_{11}=6\alpha X_1X_2,\ T_{22}=0,$$
$$T_{12}=-\beta-3\alpha X_2^2,\ T_{33}=6\nu\alpha X_1X_2.$$



شکل ۵-۱۶

(پ) روی مرزهای $X_2=\pm(h/2)$ اثرهای سطحی عبارت‌اند از:

$$\mathbf{t}=\pm(T_{22}\mathbf{e}_2+T_{12}\mathbf{e}_1)=\pm\left(-\beta-\frac{3\alpha h^2}{4}\right)\mathbf{e}_1.$$

اما در پی آنیم که سطح جانبی $X_2=\pm(h/2)$ بدون اثر سطح باشد، بنابراین

$$\beta=-\frac{3h^2}{4}\alpha.$$

روی مرز $X_1=0$ داریم:

$$\mathbf{t}=-\mathbf{T}\mathbf{e}_1=(\beta+3\alpha X_2^2)\mathbf{e}_2.$$

این اثر برشی را می‌توان معادل نیروی وارده $-P\mathbf{e}_2$ به صورت زیر ساخت:

$$-P=\beta\int dA+3\alpha\int X_2^2\,dA,$$
$$=\beta A+3\alpha I,$$

که $A=bh$ و $I=bh^3/12$. با جایگزینی مقدار β، داریم:

$$P = \alpha\left(\frac{3}{4}bh^3 - \frac{bh^3}{4}\right) = \left(\frac{bh^3}{2}\right)\alpha.$$

بنابراین، $\alpha=2p/bh^3$ و $\beta=-3p/2bh$، تنشها عبارت‌اند از:

$$T_{11} = \frac{12P}{bh^3}X_1X_2 = \frac{PX_1X_2}{I},$$

$$T_{12} = \frac{3P}{2A} - \frac{P}{2I}X_2^2.$$

روی صفحه $X_1=0$ تنش برشی حداکثر، در $X_2=0$ اتفاق افتاده و برابر $3P/2A$ می‌باشد. روی مرز $X_1=l$ داریم:

$$\mathbf{t} = \left(\frac{Pl}{I}X_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{3P}{2A} - \frac{P}{2I}X_2^2\right)\mathbf{e}_2.$$

نخستین مولفه معادله فوق، متناظر با تنش عمودی - ناشی از ممان خمشی - برابر pl است و دومین مولفه، دقیقاً نظیر توزیع سهموی تنش برشی، در $X_1=0$ می‌باشد.

برای این که یک حالت کرنش در صفحه به دست آید، لازم است که اثرهای عمودی را روی وجوه کناری $X_3=\pm b/2$ داشته باشیم. این اثرها، در حقیقت $\mathbf{t}=\pm T_{33}\mathbf{e}_3=\pm 6\nu\alpha X_1X_2\mathbf{e}_3$ هستند. اگر این وجوه کناری، توسط دیوارهای هموار و صافی مقید شوند، آن‌گاه حل کنونی را ممکن است به عنوان یک تقریب خوب - وقتی b بزرگ است - لحاظ نمود. از سوی دیگر، اگر این وجوه کناری، بدون اثر سطحی باشند، آن‌گاه می‌توان نشان داد که حالت تنش در تیر، به حالت تنش در صفحه نزدیک می‌شود $T_{33}=0$، بقیه مولفه‌ها مطابق آن چه که به دست آمد) و این، برای وقتی است که عرض b به صفر نزدیک می‌شود.

مسائل

۵ - ۱ نشان دهید که بردار صفر[۶۷] تنهابردار همسانگرد[۶۸] می‌باشد. (راهنمایی: فرض کنید a یک بردار همسانگرد باشد، آن‌گاه با استفاده از یک تغییر مبنای ساده، مولفه‌های پریم‌دار و بدون پریم را برابر قرار دهید).

---

67 - null vector

68 - isotropic

۵ - ۲ - نشان دهید که عمومی‌ترین تانسور مرتبه دو همسانگرد، به شکل $\alpha \mathbf{I}$ می‌باشد، α یک عددی و $\mathbf{I}$ تانسور واحد است [معادله (۴ - ۱) را ببینید].

۵ - ۳ - نشان دهید که برای یک ماده الاستیک خطی ناهمسانگرد، جهات اصلی تنش و کرنش معمولاً بر یکدیگر منطبق نمی‌شوند.

۵ - ۴ - اگر ثابتهای لامه $\lambda=119.2Gpa(17.3\times 10^6 psi)$ ، $\mu=79.2Gpa(11.5\times 10^6 Psi)$ باشند، مدول یانگ، ضریب پواسون و مدول حجمی[69] را بیابید.

۵ - ۵ - مدول یانگ، $E_y=103Gpa(15\times 10^6 Psi)$ و ضریب پواسون $\nu=0.34$ داده شده است، ثابتهای لامه λ و μ را پیدا کنید. مدول حجمی را نیز بیابید.

۵ - ۶ - مدول یانگ $E_y=193Gpa(28\times 10^6 Psi)$ و مدول برش $\mu=76Gpa(11\times 10^6 Psi)$ داده شده‌اند، ضریب پواسون ν، ثابت لامه λ و مدول حجمی k را بیابید.

۵ - ۷ - اگر مولفه‌های کرنش در نقطه‌ای از یک فولاد ساختمانی عبارت باشد از:

$$E_{11} = 36\times 10^{-6},\quad E_{22} = 40\times 10^{-6},\quad E_{33} = 25\times 10^{-6},$$

$$E_{12} = 12\times 10^{-6},\quad E_{23} = 0,\quad E_{13} = 30\times 10^{-6}.$$

مولفه‌های تنش را پیدا کنید: $\mu=79.2Gpa(11.5\times 10^6 Psi)$ ، $\lambda=119.2Gpa(17.3\times 10^6 Psi)$

۵ - ۸ - مسئله ۵ - ۷ را برای مولفه‌های کرنش زیر انجام دهید:

$$E_{11} = 100\times 10^{-6},\quad E_{22} = -50\times 10^{-6},\quad E_{33} = 200\times 10^{-6},$$

$$E_{12} = -100\times 10^{-6},\quad E_{23} = 0,\quad E_{13} = 0.$$

۵ - ۹ - (الف) اگر حالت تنش در نقطه‌ای از فولاد ساختمانی عبارت باشد از:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

مولفه‌های کرنش را بیابید. $\nu=0.3$ ، $\mu=79.2Gpa(11.5\times 10^6 Psi)$ ، $E_y=207Gpa(30\times 10^6 Psi)$

(ب) فرض کنید که یک مکعب به طول ضلع پنج سانتی‌متر - از فولاد فوق الذکر - دارای یک حالت

69 - bulk modulus

ثابت - تنش داده شده در بند (الف) - باشد. تغییر کل در حجم، ناشی از اعمال این میدان تنش را محاسبه کنید.

۵ - ۱۰ - (الف) برای میدان تنش ثابت زیر، مولفه‌های کرنش را به دست آورید.

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(ب) فرض کنید که کره‌ای به شعاع $5\ cm$ تحت تاثیر این میدان تنش قرار گرفته است، تغییر در حجم کره چقدر خواهد بود؟ از ثابتهای الاستیک مسئله ۵ - ۹ استفاده نمایید.

۵ - ۱۱ - برای یک ماده تراکم ناپذیر (مثال ۵ - ۴، $\nu = \frac{1}{2}$) نشان دهید که (الف)

$$\mu = E_Y/3, \quad \lambda = \infty, \quad k = \infty,$$

و (ب) قانون هوک صورت زیر را خواهد داشت؟

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \tfrac{1}{3}(T_{kk})\mathbf{I}.$$

۵ - ۱۲ - تابع $f(a, b) = ab$ و حرکت زیر داده شده است

$$x_1 = X_1 + k(X_1 + X_2),$$
$$x_2 = X_2 + k(X_1 - X_2),$$

که در آن، $k = 10^{-4}$

(الف) نشان دهید که: $f(X_1, X_2) \approx f(x_1, x_2)$

(ب) نشان دهید که:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \approx \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \approx \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2}.$$

۵ - ۱۳ - مسئله قبل را برای $f(a, b) = a^2 + b^2$ انجام دهید.

۵ - ۱۴ - میدان تغییر مکان زیر داده شده است

$$u_1 = kX_3X_2, \quad u_2 = kX_3X_1, \quad u_3 = k(X_1^2 - X_2^2), \qquad k = 10^{-4},$$

(الف) مولفه‌های تنش متناظر را بیابید.

(ب) در غیاب نیروهای حجمی، آیا حالت تنش، یک میدان تنش در حال تعادل و امکان پذیر است؟

۵-۱۵ - مسئله ۵-۱۴ را تکرار کنید، به استثنای این که مولفه‌های تغییر مکان عبارت‌اند از:

$$u_1 = kX_2X_3, \quad u_2 = kX_1X_3, \quad u_3 = kX_1X_2, \qquad k = 10^{-4}.$$

۵-۱۶ - مسئله ۵-۱۴ را تکرار کنید، به استثنای این که مولفه‌های تغییر مکان عبارت‌اند از:

$$u_1 = -kX_3X_2, \quad u_2 = kX_1X_3, \quad u_3 = k\sin X_2, \qquad k = 10^{-4}.$$

۵-۱۷ نسبت C_L / C_T را برای ضریب پواسون برابر با $\frac{1}{3}$، ۰/۴۹، ۰/۴۹۹ محاسبه کنید.

۵-۱۸ - یک میدان تغییر مکان اختیاری را در نظر بگیرید که فقط وابسته به متغیر میدان X_2 و زمان t باشد، محاسبه کنید که میدان تغییر مکان، چه معادلات دیفرانسیلی را باید ارضا کند تا یک حرکت ممکن باشد (با نیروی حجمی صفر).

۵-۱۹ - یک محیط الاستیک خطی را در نظر بگیرید. شکل زیر را برای میدان تغییر مکان فرض کنید

$$u_1 = \epsilon\{\sin\beta(X_3 - ct) + \alpha\sin\beta(X_3 + ct)\}, \quad u_2 = u_3 = 0.$$

(الف) طبیعت این موج الاستیک چیست (طولی، عرضی، جهت انتشار)؟

(ب) کرنشها و تنشهای مربوطه را پیدا کرده، مشخص کنید که تحت چه شرایطی، معادلات حرکت با نیروی حجمی صفر ارضا می‌شوند.

(پ) فرض کنید که مرزی در $X_3=0$ و بدون اثر سطحی وجود داشته باشد. تحت چه شرایطی، معادله حرکت فوق، این شرط مرزی را برای تمامی زمانها ارضا می‌کند.

(ت) فرض کنید که مرزی در $X_3=l$ و بدون اثر سطحی وجود دارد. چه شرایط دیگری باید روی حرکت فوق اعمال شود تا این شرط مرزی برای تمامی زمانها ارضا شود؟

۵-۲۰ - مسئله قبل را انجام دهید اگر مرز $X_3=0$ ثابت (بدون حرکت) و $X_3=l$ هنوز بدون اثر سطحی باشد.

۵-۲۱ - مسئله ۵-۲۰ را انجام دهید، اگر مرزهای $X_3=0$ و $X_3=l$ هر دو به صورت صلب و ثابت باشند.

۵-۲۲ - مسئله ۵-۱۹ را انجام دهید، اگر میدان تغییر مکان فرض شده، به صورت زیر باشد:

$$u_3 = \sin\beta(X_3 - ct) + \alpha\sin\beta(X_3 + ct),$$
$$u_1 = u_2 = 0.$$

۵-۲۳ - مسئله ۵-۲۲ را انجام دهید، اگر مرز $X_3=0$ ثابت (بدون حرکت) و $X_3=l$ بدون اثر سطحی باشد $(t=0)$.

۵-۲۴ - مسئله ۵-۲۲ را انجام دهید، اگر مرز $X_3=0$ و $X_3=l$ هر دو به صورت صلب و ثابت باشند.

۵-۲۵ - میدان تغییر مکان اختیاری $\mathbf{u}=\mathbf{u}(X_1, t)$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که اگر حرکت، هم حجم باشد $(\sigma u_i / \sigma X_i=0)$، $\mathbf{u}$ باید معادله زیر را ارضا کند:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

(ب) نشان دهید که اگر حرکت غیرچرخشی‌باشد $\sigma u_i / \sigma X_j = \sigma u_j / \sigma X_i$، اتساع $e=\sigma u_i / \sigma X_i$ باید در معادله زیر صدق نماید:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 e}{\partial X_i \partial X_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}.$$

۵-۲۶ - (الف) یک میدان تغییر مکان، برای یک سلسلهٔ بی‌نهایت، از امواج طولی که در جهت $3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2$ منتشر می‌شوند، بنویسید.

(ب) یک میدان تغییر مکان، برای یک سلسله بی‌نهایت، از امواج عرضی منتشره در جهت $3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2$ و قطبی شده در صفحه $X_1 X_2$ بنویسید.

۵-۲۷ - ماده‌ای با ضریب پواسون برابر با $\frac{1}{۳}$، و موج الاستیک عرضی (نظیر بخش ۵-۷ پ) با دامنه ε_1 و تابیده روی صفحه مرزی با زاویه α_1 را در نظر بگیرید. دامنه‌ها و زوایای انعکاس امواج منعکس شده را محاسبه کنید اگر

(الف) $\alpha_1 = 0,$

(ب) $\alpha_1 = 15°.$

۵-۲۸ - یک موج عرضی تابشی روی یک مرز آزاد (نظیر بخش ۵-۷ پ) را در نظر بگیرید، تحت چه زوایای خاصی از تابش، موج منعکس شده عرضی خواهد بود؟ (فرض کنید $\nu=\frac{1}{۳}$).

۵-۲۹ - یک موج عرضی تابیده[70] روی سطح صفحه بدون اثر سطحی و قطبی شده عمود بر صفحه تابش را در نظر بگیرید. نشان دهید که تنها اگر موج منعکس شدهٔ عرضی، به طور مشابه قطبی شود، شرط

70 - incident

مرزی ارضا می‌شود. رابطه بین دامنه‌ها، طول موجها و جهت انتشار موج تابشی و انعکاسی چیست؟

۵-۳۰ - مسئله بخش ۵-۷ پ را در نظر گرفته‌و مشخصه‌های موج منعکس شده را محاسبه کنید، اگر مرز $(X_2=0)$ ثابت باشد (بدون حرکت). اگر مرز آزاد باشد، نتایج چه تغییری خواهند نمود؟

۵-۳۱ - یک موج الاستیک طولی روی مرز ثابت می‌تابد.

(الف) نشان دهید که در حالت کلی دو موج انعکاسی وجود دارد، یکی طولی و دیگری عرضی (قطبی شده در صفح عمود بر صفحه تابش).

(ب) نظیر بخش ۵-۷ پ نسبت دامنه امواج الاستیک منعکس شده، به تابیده را بیابید.

۵-۳۲ - مسئله قبل را برای مرز آزاد انجام دهید.

۵-۳۳ - ثابت کنید که ارتعاش کشش ضخامت - داده شده توسط معادله (۵-۲۸) - معادله موج طولی را ارضا می‌کند.

۵-۳۴ - مثال ۵-۱۱ را با شرط آزاد بودن وجه راست $(X_1=l)$، انجام دهید.

۵-۳۵ - (الف) ارتعاش کشش ضخامت را بیابید، با این شرط که به وجه $(X_1=0)$ اثر سطحی $\mathbf{t}=(\beta \cos\omega t)\mathbf{e}_1$ اعمال شود و وجه دست راست $(X_1=l)$ ثابت باشد.

(ب) فرکانسهای تشدید یا رزنانس را پیدا کنید.

۵-۳۶ - (الف) ارتعاش کشش ضخامت را بیابید، با این شرط که وجه دست چپ $(X_1=0)$ دارای تغییر مکان اجباری $\mathbf{u}=(\alpha \cos\omega t)\mathbf{e}_3$ و وجه دست راست $(X_1=l)$ ثابت باشد.

(ب) فرکانسهای تشدید را بیابید.

۵-۳۷ - مسئله قبل را حل کنید با این شرط که تغییر مکان اجباری توسط $\mathbf{u}=\alpha(\cos\omega t\mathbf{e}_2+\sin\omega t\mathbf{e}_3)$ داده شود. حرکت ذره را در سراسر ورق توصیف کنید.

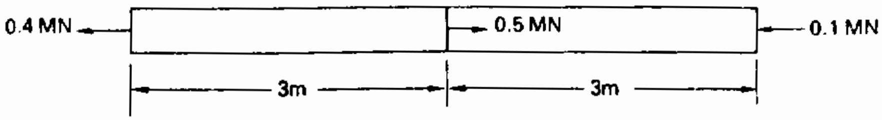
۵-۳۸ - کل افزایش طول یک میله فولادی به طول ۷۶ cm را محاسبه کنید، با این شرط که تنش کششی $0.1\ Gpa$ و $E_y=207\ Gpa$ باشند.

۵-۳۹ - یک میله چدنی به طول $4ft$ $(122\ cm)$ و قطر $1\frac{1}{2}in$ ، $(3.81\ cm)$ توسط نیروی محوری از دو انتها کشیده می‌شود.

(الف) تنشهای عمودی و برشی حداکثر را بیابید، اگر $p=20000\ lb(89000N)$

(ب) کل افزایش طول و انقباض جانبی را پیدا کنید $[\nu=0.25$ ، $E_y=15\times10^6 psi(103Gpa)]$.

۵ - ۴۰ - میله‌ای فولادی $(E_y=207Gpa)$ به سطح مقطع ۶ cm و طول ۶ m تحت اثر نیروی محوری نشان داده شده در شکل $P5.1$ قرار می‌گیرد. کل افزایش میله را پیدا کنید.



شکل $P5.1$

۵ - ۴۱ - میله‌ای فولادی به طول $10ft\ (3.05m)$ طراحی شده است تا نیروی کششی $100000lb(4444.812KN)$ را تحمل کند. حداقل مساحت سطح مقطع چقدر باید باشد تا تنش برشی حداکثر، از $20000psi(138Mpa)$ و تنش عمودی حداکثر، از $15000psi(103Mpa)$ تجاوز نکند؟ اگر علاوه بر آن، لازم باشد که افزایش طول، از $5\%in(0.127cm)$ تجاوز نکند، مساحت را بیابید.

۵ - ۴۲ - میله‌ای به مساحت سطح مقطع A را در نظر بگیرید که توسط نیروی کششی p در هر دو انتها کشیده می‌شود.

(الف) تنشهای برشی و عمودی را روی صفحه‌ای محاسبه کنید که بردار عمود بر آن، با محور استوانه زاویه α می‌سازد. برای چه مقادیری از α تنشهای عمودی و برشی برابرند؟

(ب) ظرفیت تحمل بار میله، مبتنی است بر تنش برشی صفحه‌ای که توسط $\alpha=\alpha_0$ تعریف شده (و کوچکتر از τ_0 باقی می‌ماند). چگونگی وابستگی نیروی حداکثر به زاویه α_0 را نمایش دهید.

۵ - ۴۳ - میله‌ای استوانه‌ای را در نظر بگیرید که به آن تنش محوری $T_{11}=\sigma$ وارد می‌شود.

(الف) اگر سطح جانبی میله، به گونه‌ای مقید شده باشد که هیچ گونه انقباض و انبساطی رخ ندهد، حالت تنش در میله چگونه خواهد بود؟

(ب) نشان دهید که مدول یانگ موثر $E_Y'=T_{11}/E_{11}$ توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$E_Y'=\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}E_Y.$$

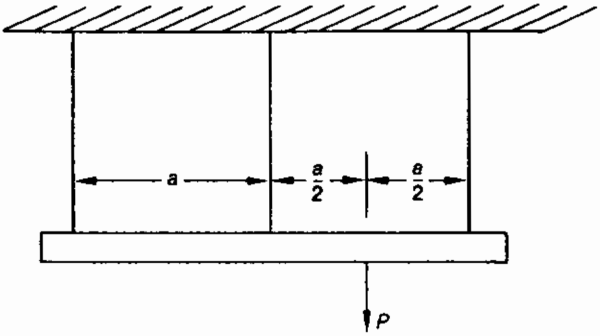
(ج) مدول موثر برای ضریب پواسون برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ را پیدا کنید.

۵-۴۴ - فرض کنید حالت تنش در نمونهٔ تحت کشش، به صورت $T_{11}=\sigma$ داده شده است و بقیه مولفه‌ها $T_{ij}=0$.

(الف) مولفه‌های تنش انحرافی $\mathbf{T}^{\circ}=\mathbf{T}-\frac{1}{3}T_{kk}\mathbf{I}$ را بیابید.

(ب) پایاهای عددی $\mathbf{T}^{\circ}$ را پیدا کنید.

۵-۴۵ - سه میله فولادی یکسان، نیروی p را (بدان گونه که در شکل $P5.2$ نشان داده شده) تحمل می‌کنند. هر میله چقدر نیرو تحمل می‌کند؟ از وزن میله‌ها و نیز میله صلب صرف نظر شود.



شکل $P5.2$

۵-۴۶ - مسئله قبل را حل کنید با این شرط که مساحت سطح مقطع میلهٔ وسط، دو برابر میله‌های طرفین باشد.

۵-۴۷ - فرض کنید که محور یک میله استوانه‌ای، عمودی بوده، ابتدای آن بر محور X_1 منطبق باشد. فرض کنید که توزیع تنش القا شده، تنها توسط نیروی حجمی به شکل $T_{11}=\rho g X_1$ است و بقیه مولفه‌ها $T_{ij}=0$ می‌باشند.

(الف) نشان دهید که تانسور تنش، یک حالت ممکن تنش، در حضور نیروی حجمی فوق می‌باشد.

(ب) اگر این حالت تنش ممکن، توزیع واقعی تنش در میله استوانه‌ای باشد، برای ایجاد این حالت تنش، چه اثرهای سطحی باید روی وجه جانبی و وجوه انتهایی اعمال شوند.

۵-۴۸ - یک محور فولادی مدور، تحت تاثیر گشتاور پیچشی $2700N.m$ قرار گرفته است. تنش کششی مجاز برابر $0.124Gpa$ می‌باشد. حداقل قطر مجاز چقدر است؟

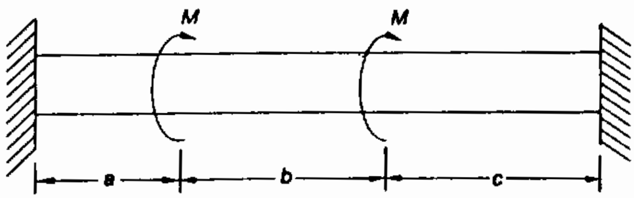
۵ - ۴۹ - یک محور فولادی مدور تحت گشتاور پیچشی $5000 ft\ lb\ (6780 N.m)$ قرار گرفته است. قطر محور را به گونه‌ای محاسبه کنید که تنش برشی حداکثر، از $1000 psi (69 Mpa)$ و زاویه پیچش، از ۱/۵ در ۲۰ برابر قطر از طول تجاوز نکنند؛ $\mu = 12 \times 10^6 psi (82.7 Gpa)$

۵ - ۵۰ - نشان دهید که حل الاستیک برای میله مدور جامد در پیچش، برای یک لوله استوانه‌ای مدور تحت پیچش نیز معتبر می‌باشد. اگر a شعاع خارجی و b شعاع داخلی باشد، معادله (۵ - ۴۲) برای پیچش بر واحد طول چقدر تغییر خواهد کرد؟

۵ - ۵۱ - در مثال ۵ - ۱۶، اگر شعاع قسمت چپ a_1 و شعاع قسمت راست a_2 باشد، ممان پیچشی ایجاد شده در هر قسمت از محور چقدر است؟ هر دو محور دارای ماده یکسان می‌باشند.

۵ - ۵۲ - اگر $a_1 = 3.0 cm$، $a_2 = 2.5 cm$، $l_1 = l_2 = 75 cm$، $M_t = 700 N.m$ باشند، مسئله قبل را حل کنید.

۵ - ۵۳ - برای محور مدور نشان داده شده در شکل $P5.3$، ممان پیچشی ایجاد شده در هر قسمت از محور را بیابید.



شکل $P5.3$

۵ - ۵۴ - یک میله مدور به شعاع یک اینچ $(2.54 cm)$ تحت تاثیر یک نیروی کششی محوری $30000 lb (133 kN)$ و گشتاور پیچشی $25000 in.lb (2830 N.m)$ قرار گرفته است.

(الف) تنش را در سراسر میله محاسبه کنید.

(ب) تنش عمودی و برشی حداکثر را (که در همه نقاط و همه صفحات سطح مقطع، در امتداد میله رخ می‌دهد) بیابید.

۵ - ۵۵ - نشان دهید که برای هر میله استوانه‌ای با سطح مقطع غیر مدور تحت پیچش، بردار تنش در تمامی نقاط وارد شده در امتداد مرز جانبی روی هر صفحه سطح مقطعی عمود، باید مماس بر مرز باشد (راهنمایی: از $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ استفاده کنید).

۵-۵۶ - نشان دهید که تغییر مکان و تنش برای میله بیضوی تحت پیچش را می‌توان برای یک لوله بیضوی به کار گرفت، به شرط آنکه مرز داخلی به صورت زیر تعریف شود:

$$\frac{X_2^2}{a^2}+\frac{X_3^2}{b^2}=k^2,$$

که $k<1$.

۵-۵۷ - گشتاور پیچشی که می‌تواند توسط محوری با سطح مقطع بیضی با محور بزرگ دو برابر محور کوچک منتقل شود را، با گشتاور پیچشی که می‌تواند توسط محوری با سطح مقطع مدور به قطری برابر محور بزرگ منتقل شود، مقایسه نمایید. هر دو محور دارای ماده یکسان می‌باشند. همچنین، پیچش واحد - تحت ممان پیچشی یکسان - را مقایسه کنید.

۵-۵۸ - مسئله قبل را تکرار کنید، به استثنای این که محور مدور دارای قطری برابر محور کوچک محور (شفت) بیضوی باشد.

۵-۵۹ - (الف) برای یک میله بیضوی تحت پیچش، نشان دهید که مقدار تنش برشی حداکثر، به صورت خطی در امتداد خطوط شعاعی $(X_2=kX_3)$ تغییر می‌کند و روی مرز خارجی به یک مقدار حداکثر می‌رسد.

(ب) نشان دهید که روی مرز، تنش برشی حداکثر، به صورت زیر داده می‌شود

$$(T_s)_{\max}=\frac{2M_t}{\pi a^2b^3}\sqrt{b^4+X_3^2(a^2-b^2)}$$

به طوری که، تنش برشی حداکثر، در انتهای محور کوچک اتفاق می‌افتد.

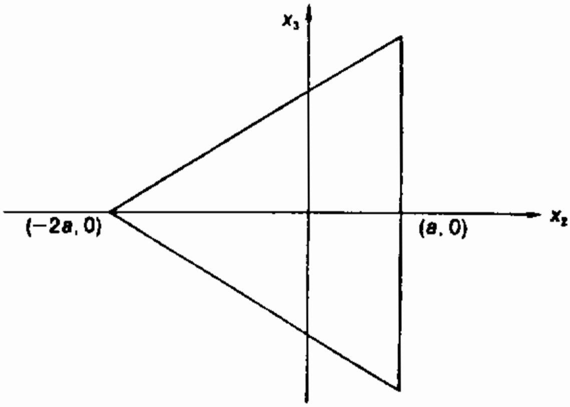
۵-۶۰ - پیچش یک میله استوانه‌ای با سطح مقطع مثلث متساوی الاضلاع - نظیر شکل $P5.4$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان‌دهید که‌تابع واپیچش [۷۱] $\phi=\alpha(3X_2^2X_3 - X_3^3)$ یک میدان تنش در حال تعادل ایجاد می‌کند.

(ب) برای ارضای شرط مرزی بدون اثر سطحی، ثابت α را محاسبه کنید. نشان دهید که تمامی سطح جانبی بدون اثر می‌باشد.

---

71 - warping function



شکل $P5.4$

(پ) توزیع تنش ایجاد شده توسط این تابع واپیچش را به صورت واضح بنویسید. تنش برشی حداکثر را در رئوس مثلث و در امتداد خط $X_3=0$ در یک سطح مقطع محاسبه کنید. در امتداد خط $X_3=0$، تنش برشی حداکثر، در کجا اتفاق می‌افتد؟

۵-۶۱ - یک شیوهٔ دیگر، در فرمول‌بندی، مسئله پیچش یک استوانه با سطح مقطع غیر مدور، استفاده از تابع تنش $\psi(X_2,X_3)$ است به طوری که تنشها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$T_{12}=\frac{\partial\psi}{\partial X_3},\quad T_{13}=-\frac{\partial\psi}{\partial X_2},$$

و تمامی مولفه‌های دیگر $T_{ij}=0$.

(الف) نشان دهید که معادلات تعادل برای هر انتخاب ψ هم زمان ارضا می‌شوند.

(ب) نشان دهید که اگر ψ معادله

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial X_3^2}=\text{constant},$$

را ارضا کند، آن گاه تنش متناظر با یک میدان کرنش سازگار، برای سطوح مقاطع مرتبط ساده خواهد بود.

(پ) نشان دهید که شرط مرز جانبی، نیازمند آن است که $\nabla\psi$ در جهت عمود، به طرف خارج باشد. به عبارت دیگر، مقادیر ψ روی مرز خارجی ثابت است.

۵-۶۲ - تیری با سطح مقطع مدور تحت خمش خالص قرار گرفته است. مقدار هر گشتاور انتهایی بربر

$14000N.m$ می‌باشد. قطر تیر چقدر باید باشد تا تنش عمودی حداکثر، از $0.124Gpa$ تجاوز نکند؟

۵-۶۳ - تیر مستطیلی مثال ۵-۲۰ دارای عرض b و ارتفاع $1.2b$ است. اگر ممان دست راست، $M=24000e_3 ft\text{-}lb$ باشد، اندازه b را به گونه‌ای بیابید که تنش برشی حداکثر، از $600psi(4.14Mpa)$ تجاوز نکند.

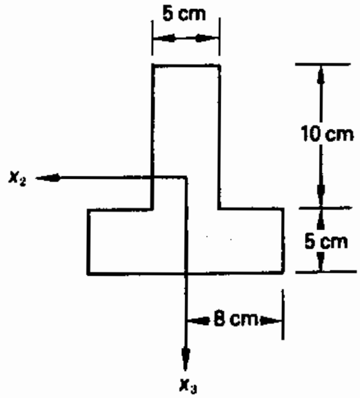
۵-۶۴ - فرض کنید که تیر مثال ۵-۲۰ توسط ممان خمشی نشان داده شده و نیز نیروی کششی محوری p بارگذاری شود. مقدار p را طوری بیابید که $T_{11} \geq 0$.

۵-۶۵ - ثابت کنید که اگر $\phi(X_2, X_2)$ معادله (۵-۵۷) را راضا کند، آن‌گاه آن تابع متناظر با یک میدان کرنش سازگار است.

۵-۶۶ - نشان دهید که برای ممان خمشی وارده به یک میله در خمش خالص (که رجوع به محور اصلی ندارد) تنش خمشی خواهد بود:

$$T_{11} = \frac{M_2 I_{zz} + M_3 I_{zy}}{I_{zz} I_{yy} - I_{zy}^2} X_3 - \frac{M_3 I_{yy} + M_2 I_{zy}}{I_{zz} I_{yy} - I_{zy}^2} X_2.$$

۵-۶۷ - شکل $P5.5$ سطح مقطع یک تیر در معرض خمش خالص را نشان می‌دهد. اگر ممانهای انتهایی، $\pm 10^4 N.me_2$ باشند، تنش عمودی حداکثر را پیدا کنید.



شکل $P5.5$

۵-۶۸ - تابع تنش زیر را در نظر بگیرید

$$\phi = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_1 X_2 + \alpha_3 X_2^2.$$

(الف) ثابت کنید که تابع تنش، یک تابع ممکن برای کرنش صفحه‌ای است.

(ب) تنشها را محاسبه کرده، اثرهای سطحی روی مرز مستطیلی $X_1=0$، $X_1=a$، $X_2=0$، $X_2=b$ را رسم کنید.

۵-۶۹ - تابع تنش $\phi=\alpha X_1^2 X_2$ را در نظر بگیرید.

(الف) آیا این، یک تابع تنش ممکن برای کرنش صفحه‌ای است.

(ب) تنشها را به دست آورید.

(پ) اثرهای مرزی روی مرز تعریف شده زیر را محاسبه کرده، رسم نمایید:

$$X_1 = 0, X_1 = a, X_2 = 0, X_2 = b.$$

۵-۷۰ - تابع تنش $\phi=\alpha X_1^4+\beta X_2^4$ را در نظر بگیرید،

(الف) آیا این، یک تابع تنش ممکن برای کرنش صفحه‌ای است؟

(ب) اثرهای سطحی روی مرز مستطیلی مسئله قبل را به دست آورد، رسم نمایید.

۵-۷۱ - تابع تنش $\phi=\alpha X_1 X_2^2+\beta X_1 X_2^3$ را در نظر بگیرید،

(الف) آیا این، یک تابع تنش ممکن برای کرنش صفحه‌ای است؟

(ب) تنشها را به دست آورید.

(پ) شرط لازم را برای آن که اثر سطحی روی $X_2=b$ صفر شودو بیابید و اثر سطحی تنش روی مرزهای باقی‌مانده $X_2=0$، $X_1=0$، $X_1=a$ را رسم نمایید.

۵-۷۲- (الف) نشان دهیدکه معادله‌ای(گاه معادله بای‌هارمونیک[۷۲] خوانده‌می‌شود) که ϕ برای ارائه یک حل الاستیک ممکن باید ارضا کند، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0,$$

که در آن، عملگر ∇^2[۷۳] بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}.$$

---

72 - biharmonic

73 - operator

(ب) تابع $\phi=\alpha log(X_1^2+X_2^2)+\beta(X_1^2+X_2^2)$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که این معادله بند (الف) را ارضا می‌کند.

(پ) توزیع تنش را به دست آورید.

(ت) فرض کنید که بردارهای پایه مختصات استوانه‌ای، به صورت زیر داده شوند:

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2.$$

برای تنش بند (پ) مولفه‌های تنش در مختصات استوانه‌ای را محاسبه کنید.

$$T_{rr} = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_r,$$

$$T_{r\phi} = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_\phi,$$

$$T_{\phi\phi} = \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_\phi.$$

(ث) اثرهای مرزی، روی مرزهای استوانه‌ای $X_1^2+{}_2X^2=a^2$ و $X_1^2+{}_2X^2=b^2$ را پیدا کنید.

فصل ۶

سیال چسبنده نیوتونی

موادی نظیر آب و هوا، مثالهایی از یک سیال می‌باشند. از نقطه‌نظر مکانیک، این مواد، با یک قطعه فولاد یا بتن متفاوت‌اند، چرا که قادر به تحمل تنشهای برشی، بدون تغییر شکل مداوم نیستند. به‌عنوان مثال، اگر آب یا هوا بین دو ورق موازی قرار گیرد و یکی از ورقها ثابت و دیگری یک تنش برشی اعمال کند حال اگر تنش برشی حذف نشود، مادهٔ بین دو ورق، به طور نامحدود ـ با زمان ـ تغییر شکل خواهد داد. همچنین توجه به این حقیقت که آب در حال سکون، همواره شکل ظرف حاوی خود را می‌گیرد، نمایشی از عدم توانایی آن برای تحمل تنش برشی در سکون است. مبتنی بر این تصور از سیالیت، سیال را چنین تعریف می‌کنیم که: طبقه‌ای از مواد ایده آل است، که در حین حرکت به صورت جسم صلب (و نیز حالت سکون) قادر به تحمل هیچ گونه تنش برشی نیست. آب نیز نمونه‌ای از مایع است که تحت طیف وسیعی از نیروها، دچار تغییرات چگالی بسیار جزئی می شود، حال آن‌که هوا، مثالی از یک گاز است که به‌گونه دیگری عمل میکند. این وجه از رفتار، به مفهوم سیالات تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر تعمیم می یابد. به هرحال، بدان‌گونه که بعداً خواهید دید، تحت شرایط خاصی (جریان با عدد ماخ کم) هوا را به عنوان تراکم ناپذیر می‌توان بررسی کرد وتحت شرایطی (آکوستیک) آب را تراکم‌پذیر انگاشت.

در این فصل، مدل ویژه‌ای از سیال را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن، سیال دارای این خاصیت

است که تنش مرتبط با حرکت، به طور خطی وابسته به مقدار لحظه‌ای نرخ تغییر شکل می‌باشد. این مدل از سیال، به عنوان سیال نیوتنی یا سیال چسبنده خطی شناخته می‌شود و مشخص شده است که قادر به توصیف کافی رفتار مکانیکی بسیاری از سیالات حقیقی، تحت طیف وسیعی از موقعیتهای متفاوت می‌باشد. به هرحال، برخی از سیالات، نظیر حلالهای پلی‌مری، برای توصیف، نیازمند یک مدل عمومی‌تر و کاملتر (سیال غیرنیوتنی) هستند. یک مدل عمومی‌تر از سیال غیرنیوتنی، در فصل هشتم مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۶-۱ سیالات[1]

مبتنی بر مفهوم سیالیت (که در پاراگرافهای قبل بحث شد) یک سیال را وقتی به عنوان طبقه‌ای از مواد ایده‌آل تعریف می‌کنیم که هنگامی که در حرکت جسم صلب است (من‌جمله حالت سکون)، قادر به تحمل هیچ تنش برشی نباشد. به عبارت دیگر، وقتی سیالی در حرکت جسم صلب است، بردار تنش روی هر صفحه، عمود بر آن می‌باشد. بنابراین، هر صفحه‌ای صفحهٔ اصلی است، و معادل آن، هر جهتی یک بردار ویژه از تانسور تنش می‌باشد. از این، نتیجه می‌شود که همه مقادیر ویژه، برابرند[2]. به عنوان نتیجه، روی تمامی صفحاتی که از یک نقطه می‌گذرند، نه تنها هیچ تنش برشی وجود ندارد بلکه تمامی تنشهای عمودی نیز برابرند. به عبارت دیگر، برای یک سیال در حرکت جسم صلب

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{I}. \tag{۶-۱ الف}$$

یا به شکل مؤلفه‌ای

$$T_{ij}=-p\delta_{ij} \tag{۶-۱ ب}$$

عددی P، مقدار تنش عمودی فشاری است و به عنوان "فشار هیدرواستاتیک" شناخته می‌شود.

1- fluids

۲. از $\mathbf{Tn}_1=\lambda_1\mathbf{n}_1$، $\mathbf{Tn}_2=\lambda_2\mathbf{n}_2$ به دست می‌آید $(\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathbf{n}_1 . \mathbf{n}_2=0$ [بخش ۲ ب ۱۳، معادله (۷)]. چون $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دلخواه هستند، لذا $\lambda_1=\lambda_2$.

۶-۲- سیالات تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر

آنچه که معمولاً "سیال" خوانده می‌شود - نظیر آب و جیوه - این خاصیت را دارند که چگالی آنها در اصل، تحت طیف وسیعی از فشارها، بدون تغییر باقی می‌ماند. با ایده‌آل نمودن این خاصیت، یک "سیال تراکم ناپذیر[3]" را سیالی تعریف می‌کنیم که چگالی هر ذره آن، در تمامی زمانها - بدون توجه به حالت تنش - یکسان باقی بماند. یعنی برای یک سیال تراکم‌ناپذیر

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{۶-۲}$$

پس از معادله بقای جرم نتیجه می‌شود:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

که

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \tag{۶-۳}$$

یا

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{۶-۳ الف}$$

یک سیال تراکم ناپذیر، نیازمند این نیست که از نظر فضایی دارای یک چگالی یکنواخت باشد (نظیر آب نمک با غلظت غیریکنواخت نسبت به عمق). اگر چگالی یکنواخت نیز باشد، از آن، به عنوان "سیال همگن" که برای آن در همه جا ثابت = ρ، یادمی‌شود.

موادی نظیر هوا یابخار (که چگالی آنها به‌نحو قابل ملاحظه‌ای با فشار تغییر می‌کند) اغلب به عنوان سیالات تراکم پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند. البته به سادگی می‌توان مشاهده کرد که در برخی موقعیتها آب را باید به عنوان تراکم پذیر و هوا را به‌صورت تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. به‌هرحال در مطالعات نظری، متداول آن است که سیال تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر را به عنوان دو نوع سیال متمایز در نظر می‌گیرند.

3- Incompressible fluid

۶-۳- معادلات هیدرواستاتیک

با $T_{ij}=-p\delta_{ij}$، معادلات تعادل زیر

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho B_i=0, \qquad (۶-۴)$$

که درآن، B مؤلفه‌های نیروی حجمی بر واحد حجم می‌باشند، به شکل زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho B_i \qquad (۶-۵ \text{الف})$$

یا

$$\nabla p=\rho\mathbf{B}. \qquad (۶-۵ \text{ب})$$

اگر B_i مؤلفه‌های وزن بر واحد جرم باشد و جهت مثبت محور x_3 را عمودی و به‌سوی پایین در نظر بگیریم، داریم $B_1=B_2=0$ و $B_3=g$، به طوری که معادلات (۶ - ۵) می‌شوند:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=0, \qquad (۶-۶\text{الف})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}=0, \qquad (۶-۶\text{ب})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}=\rho g. \qquad (۶-۶\text{پ})$$

اگر سیال، در حالت حرکت جسم صلب باشد (نرخ تغییر شکل = ۰) معادله (۶ - ۵) را باید اصلاح نمود تا مؤلفه شتاب منظم شود (مثال ۲ - ۶ را ببینید).

مثال ۶-۱

فرض کنید $x_3=0$ سطح یک سیال همگن، و جهت مثبت محور x_3، عمودی و به‌سوی پایین باشد توزیع فشار در مایع را بیابید.

حل: داریم

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=0.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}=0.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}=\rho g=\text{constant}.$$

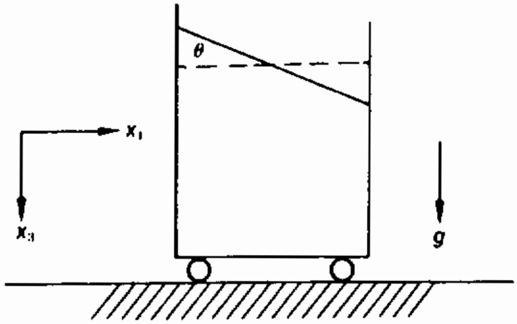
بنابراین، p تنها وابسته به x_3 بوده و در حقیقت داریم:

$$p=\rho g x_3+p_0.$$

که در آن p_0، فشار اتمسفر می‌باشد.

مثال ٦ـ۲

یک تانک حاوی سیال همگن، به طور افقی با شتاب ثابت a به طرف راست حرکت می‌کند، زاویه شیب θ سطح آزاد را بیابید.



شکل ٦–۱

حل: معادله حرکت عبارت است از

$$\rho a = -\frac{\partial p}{\partial x_1}. \qquad \text{(i)}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}. \qquad \text{(ii)}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g. \qquad \text{(iii)}$$

از (ii)، p مستقل از x_3 است، از معادله (i)

$$p = -\rho a x_1 + f(x_3) \qquad \text{(iv)}$$

و از معادلات (iii) و (iv)

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{df}{\partial x_3} = \rho g.$$

بنابراین:

$$f(x_3) = \rho g x_3 + \text{constant},$$

یعنی

$$p = -\rho a x_1 + \rho g x_3 + c.$$

اگر در لحظه موردنظر، مبدأ مختصات در نقطه‌ای روی سطح آزاد واقع شده باشد، آن‌گاه، $C=P_0$، که P_0 فشار محیط است. روی سطح نیز $P=P_0$ است، بنابراین، سطح صفحه‌ای است با رابطه زیر:

$$\rho g x_3 = \rho a x_1,$$

یعنی:

$$x_3 = \frac{a}{g} x_1$$

و

$$\tan\theta = \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{a}{g}.$$

مثال ۶-۳

برای تفاوتهای اندک ارتفاع، جو را می‌توان با دمای ثابت فرض کرد. برای این حالت، توزیع فشار و چگالی را بیابید.

حل: فرض کنید محور x_3 عمود و به سوی بالا باشد. پس

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{i}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \tag{ii}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g. \tag{iii}$$

از معادلات (i) و (ii)، می‌بینیم که P تنها تابع x_3 می‌باشد، بنابراین معادله (iii) می‌شود:

$$\frac{dp}{dx_3} = -\rho g. \tag{iv}$$

فرض کنید P ، ρ و θ (دمای مطلق) توسط معادله حالت[4] برای گاز ایده آل به یکدیگر مرتبط می‌شوند، داریم

$$p = \rho R\theta, \tag{v}$$

که R ثابت گاز می‌باشد، معادله (iv) می‌شود:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R\theta} dx_3.$$

با انتگرال گیری، به دست می‌آید:

$$\ln p = -\frac{g}{R\theta} x_3 + \ln p_0,$$

که P_0 فشار در روی زمین $(x_3=0)$ است، بنابراین:

$$p = p_0 e^{-(g/R\theta)x_3}, \tag{vi}$$

و از معادله (v)، اگر چگالی در $(x_3=0)$ باشد، داریم:

$$\rho = \rho_0 e^{-(g/R\theta)x_3}. \tag{vii}$$

۶-۴ سیال نیوتنی

چون حالت تنش برای یک سیال تحت حرکت جسم صلب (من‌جمله سکون) توسط یک تانسور همسانگرد ارائه می‌شود، در بحث پیرامون حرکت عمومی یک سیال، طبیعی است که تانسور تنش رابه دو بخش تفکیک کنیم:

4- equation of state

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij}, \qquad (۶-۷)$$

که مقادیر T'_{ij} وابسته به نرخ و (یا) نرخهای بالاتر تغییر شکل می‌باشند به گونه‌ای که وقتی سیال تحت حرکت جسم صلب است (یعنی نرخ تغییر شکل صفر)، این مقادیر صفر می‌باشند، و P عددی است که مقدار آن، به وضوح وابسته به این نرخها نیست.

حال، طبقه‌ای از مواد ایده‌آل را که "سیالات نیوتنی" نامیده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱ ـ برای یک نقطه مادی، مقادیر T'_{ij} در هر زمان t به طور خطی وابسته به مؤلفه‌های تانسور نرخ تغییر شکل

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

در آن زمان بوده، وابسته به هیچ کمیت سینماتیکی دیگر نیستند.

۲ ـ سیال همسانگرد است.

با تبعیت از شرایطی که در ارتباط با مواد الاستیک خطی همسانگرد برشمردیم، برای یک سیال نیوتنی (که به عنوان سیال چسبنده خطی نیز شناخته می‌شود) عمومی‌ترین شکل T'_{ij} به دست می‌آید. با $\Delta \equiv D_{11}+D_{22}+D_{33}=D_{kk}$ داریم:

$$T'_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}, \qquad (۶-۸)$$

که در آن، λ و μ ثابتهای ماده بابعد $\frac{(\text{نیرو})\,(\text{زمان})}{(\text{طول})^{2}}$ می‌باشند (متفاوت از ثابتهای یک جسم الاستیک). تانسور تنش T'_{ij} به عنوان "تانسور تنش چسبندگی[5]" شناخته می‌شود. بنابراین تانسور تنش کلی عبارت است از:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}, \qquad (۶-۹)$$

یعنی

$$T_{11} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{11}, \qquad (\text{۶-۹ الف})$$

$$T_{22} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{22}, \qquad (\text{۶-۹ ب})$$

5- Viscous stress tensor

$$T_{33} = -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{33}. \qquad \text{(۶-۹پ)}$$

$$T_{12} = 2\mu D_{12}. \qquad \text{(۶-۹ت)}$$

$$T_{13} = 2\mu D_{13}. \qquad \text{(۶-۹ث)}$$

$$T_{23} = 2\mu D_{23}. \qquad \text{(۶-۹ج)}$$

عددی P در معادلات فوق "فشار[۶]" گفته می‌شود و این، تقریباً اصطلاح مبهمی است.به طوری‌که از معادلات فوق مشهود است، وقتی D_{ij} صفر نیست P ، نه برابر کل تنش عمودی فشاری روی هر صفحه است (مگر این‌که مؤلفه‌های چسبندگی صفر شوند) و نه به‌طور کلی برابر متوسط تنش عمودی فشاری است، $T_{KK}/3$ (بخش بعد را ببینید). البته اگر $D_{ij}=0$ (یعنی در سکون)، P کل تنش عمودی روی هر صفحه‌ای است که از یک نقطه معین می‌گذرد. برای نظریه سیال، تنها به یاد داشتن این نکته لازم است که تانسور همسانگرد و $P\delta_{ij}$- بخشی از T_{ij} است که به‌وضوح وابسته به هیچ گونه نرخ تغییر شکلی نیست.

۶-۵- تعبیر λ و μ

جریان برشی داده شده به وسط میدان سرعت زیر را در نظر بگیرید:

$$v_1 = f(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

برای این جریان داریم: $D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{13} = D_{23} = 0$

و

$$D_{12} = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_2}.$$

به‌طوری‌که $T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p. \quad T_{13} = T_{23} = 0$

و

$$T_{12} = \mu\frac{df}{dx_2}. \qquad \text{(۶-۱۰)}$$

بنابراین، μ ثابت تناسبی است که تنش برشی را به گرادیان سرعت مرتبط می‌کند و به عنوان (اولین) ضریب چسبندگی[۷] شناخته می‌شود.

6- pressure

7- coefficient of viscosity

از معادله (۶-۸)، برای یک میدان سرعت عمومی، داریم:

$$\tfrac{1}{3} T'_{ii} = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\Delta. \qquad (۶-۱۱)$$

بنابراین، $(\lambda+\frac{2}{3}\mu)$ ثابت تناسبی است که متوسط تنش عمودی چسبندگی را به نرخ تغییر حجم مرتبط می‌سازد و به عنوان ضریب چسبندگی حجمی[8] شناخته می‌شود. میانگین تنش عمودی کل، به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\tfrac{1}{3} T_{ii} = -p + (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\Delta \qquad (۶-۱۲)$$

واضح است که در حالت کلی، آن‌چه فشار گفته می‌شود، برابر متوسط تنش عمودی نیست.

مثال ۶-۴

میدان سرعت زیر:

$$v_1 = -x_1 - x_2, \quad v_2 = x_2 - x_1, \quad v_3 = 0,$$

برای یک مایع نیوتنی با چسبندگی $\mu = ۰/۹۸۲$ mpàs(2.05x10-5lb sec/ft2) داده شده است. برای صفحه‌ای که عمود بر آن و در جهت e_1 است، (الف) مقدار افزایش بنش عمودی فشاری کل بر فشار P را بیابید، و (ب) مقدار تنش برشی را پیدا کنید.

حل: (الف) از

$$T_{11} = -p + 2\mu D_{11}, \qquad (\Delta = 0).$$

داریم:

$$(-T_{11}) - p = -2\mu D_{11}.$$

حال:

$$D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -1\,(\text{sec})^{-1}.$$

بنابر این:

$$(-T_{11}) - p = -2(0.982)\,(-1) = 1.96 \text{ mPa}.$$

(ب)

$$T_{12} = 2\mu D_{12} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = -2\mu$$

$$= -1.96 \text{ mPa}$$

$$T_{13} = 2\mu D_{13} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) = 0.$$

بنابراین، مقدار تنش برشی برابر است با 1.96mpa.

8- coefficient of bulk viscosity

٦-٦- سیال نیوتنی تراکم ناپذیر

برای یک سیال تراکم ناپذیر[9]، در تمامی زمانها $\Delta=0$.

بنابراین، معادله بنیادین برای چنین سیالی می‌شود:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \qquad (۱۳-٦)$$

وفشار $p=-T_{ii}/3$ دارای معنای میانگین تنش عمودی فشاری خواهد بود. و به وضوح، وابسته به کمیتهای سینماتیکی و یا متغیرهای ترمودینامیکی نیست (توجه کنید که چگالی یک ذره، با زمان تغییر نمی‌کند) و باید به عنوان یکی از متغیرهای اساسی دینامیکی تلقی شود.

چون

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad (۱۴-٦)$$

که v_i مؤلفه‌های سرعت هستند، معادلات بنیادین را بدین‌صورت می‌توان نوشت:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \qquad (۱۵-٦)$$

یعنی

$$T_{11} = -p + 2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \qquad (\text{۱۵-٦ الف})$$

$$T_{22} = -p + 2\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \qquad (\text{۱۵-٦ ب})$$

$$T_{33} = -p + 2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \qquad (\text{۱۵-٦ پ})$$

$$T_{12} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), \qquad (\text{۱۵-٦ ت})$$

$$T_{13} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right), \qquad (\text{۱۵-٦ ث})$$

9- incompressible

$$T_{23} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right). \qquad (\text{۶-۱۵ ج})$$

با جایگزینی معادله بنیادین [معادله (۶ - ۱۵)] در معادله حرکت زیر

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \rho B_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

و با توجه به این‌که

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

(توجه شود $\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta = 0$)

معادلات حرکت زیر، بر حسب مؤلفه‌های سرعت به‌دست می‌آید:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \rho B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \qquad (\text{۶-۱۶})$$

یعنی:

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \rho B_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_1,$$
(۶-۱۶ الف)،

$$\rho\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) = \rho B_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_2,$$
(۶-۱۶ ب)

$$\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = \rho B_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_3,$$
(۶-۱۶ پ)

یا به شکل پایا

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right] = \rho\mathbf{B} - \nabla p + \mu\,\mathbf{div}\,(\nabla\mathbf{v}). \qquad (\text{۶-۱۶ ت})$$

اینها، به عنوان معادلات حرکت ناویر - استوک برای سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر شناخته می‌شوند. در سه معادله فوق، چهار تابع مجهول v_1 ، v_2 ، v_3 و p وجود دارند. معادله چهارم توسط معادله پیوستگی $\Delta = 0$ تأمین می‌شود، یعنی:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (\text{۶-۱۷ الف})$$

یا به شکل پایا

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \qquad (۶-۱۷ ب)$$

مثال ۶-۵

اگر تمامی ذرات، دارای بردارهای سرعت موازی یک‌جهت ثابت باشند، جریان را سیلان موازی (یا جریان تک‌جهت) گویند. نشان دهید که برای جریان موازی یک سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر خطی، تنش فشار عمودی کل، روی هر صفحه موازی، یا، عمود بر جهت جریان، برابر با فشار p می‌باشد.

حل: فرض کنید که جهت جریان محور x_1 باشد، پس:

$$v_2 = 0 \qquad\qquad v_3 = 0$$

از معادله پیوستگی نتیجه می‌شود $\partial v_i/\partial x_i = 0$. بنابراین میدان سرعت برای یک جریان موازی، عبارت است از:

$$v_1 = v_1\ (x_2\ x_3),\ v_2 = 0,\ v_3 = 0$$

برای این جریان، $D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0$، بنابراین:

$$T_{11} = -p,$$

$$T_{22} = -p,$$

$$T_{33} = -p.$$

در مختصات استوانه‌ای که v_r و v_ϕ و v_z نمایشگر مؤلفه‌های سرعت در جهات r، ϕ، و z می‌باشند، معادله ناویر - استوکث برای سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، شکل زیر را خواهدداشت:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + B_r + \frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2}\right\}. \qquad (۶-۱۸ الف)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + B_\phi + \frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial_r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2}\right\}, \qquad (۶-۱۸ ب)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + B_z + \frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right\}. \qquad (۶-۱۸ پ)$$

و معادله پیوستگی شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{۱۹-۶}$$

۶-۷- شرایط مرزی

روی یک مرز صلب، شرط «غیرلغزشی»[10] را اعمال می‌کنیم (به عنوان شرط چسبندگی نیز مشهور است)، یعنی لایه سیال مجاور یک سطح صلب، با آن سطح حرکت می‌کند، (به خصوص اگر سطح در سکون باشد، سرعت سیال روی سطح صفر است). شرط غیرلغزشی، توسط آزمایشات مختلف برای بسیاری از سیالات کاملاً به‌اثبات رسیده‌است. حتی هنگامی که سیال، سطح مرزی را تر نمی‌کند (نظیر حالت جیوه روی شیشه)، شرط فوق هنوز مناسب تشخیص داده شده‌است و حتی برای برخی از سیالات غیرنیوتنی (که برای آنها معادلات بنیادین پیچیده‌تری از آنچه که ما لحاظ کردیم، وجود دارد) شرط غیرلغزشی توسط آزمایش اثبات شده‌است.

۶-۸- خط جریان، خط مسیر، سیال پایدار، ناپایدار، آرام و مغشوش

(i) خط جریان

یک **خط جریان**[11] (در زمان t) یک منحنی است که در هر نقطه‌اش، خط مماس، در جهت بردار سرعت ذره‌ای است که به طور لحظه‌ای در آن نقطه قرار دارد. به طور تجربی، خطوط جریان روی سطح یک سیال، غالباً توسط عکس‌برداری با نوردهی (اکسپوژور)[12] کوتاه‌مدت (از سطحی که روی آن، ذرات منعکس‌کننده پاشیده شده) به دست می‌آید. هر ذرهٔ انعکاس، یک خط کوتاه روی عکس ایجاد می‌کند (که تقریبی بر خط مماس بر خط جریان می‌باشد). به لحاظ ریاضی، خطوط جریان را می‌توان از میدان سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ به‌صورت زیر به دست آورد:

فرض کنید $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ معادله پارامتریک خط جریان در زمان t_0 باشد، که از یک نقطه داده‌شده $\mathbf{x}_0$

10- Nonslip

11- Streamline

12- Exposure

می‌گذرد. آن گاه همواره می‌توان یک s را طوری انتخاب کرد که[۱۳]

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{۶-۲۰}$$

مثال ۶-۶

میدان سرعت زیر داده شده‌است:

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = x_2, \quad v_3 = 0.$$

خط جریان را در زمان t_0 که از نقطه (α_1 و α_2 و α_3) می‌گذرد، پیدا کنید.

حل: از $\dfrac{dx_1}{ds} = \dfrac{x_1}{1+t_0}$ داریم:

$$\int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{1+t_0} \int_0^s ds.$$

بنابراین:

$$\ln x_1 - \ln \alpha_1 = \frac{s}{1+t_0}.$$

یعنی:

$$x_1 = \alpha_1 e^{s/(1+t_0)}.$$

به طور مشابه، از $\dfrac{dx_2}{ds} = x_2$، داریم:

$$\int_{\alpha_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_0^s ds.$$

بنابراین $x_2 = \alpha_2 e^s$. واضح است که $x_3 = d_3$.

(ii) خط مسیر

یک **خط مسیر**[۱۴]، مسیری است که توسط ذره سیال طی می‌شود. برای عکس‌برداری از خط مسیر، لازم است که از نوردهی درازمدت ـ برای ذرات منعکس‌کننده ـ استفاده کنیم. به لحاظ ریاضی، خط مسیر یک ذره که در زمان t_0 در $\mathbf{x}$ است، را می‌توان از میدان سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ به صورت زیر به دست آورد: فرض کنید $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ خط مسیر باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}. \end{cases} \tag{۶-۲۱}$$

---

۱۳. توجه کنید که برای انتخاب اختیاری پارامتر s، معادله، باید به صورت $\dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \beta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$ باشد، به عنوان مثال، اگر s طول کمان باشد، آن‌گاه $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{d\mathbf{x}}{ds}$، اما همواره s را می‌توان طوری انتخاب کرد که $\beta = 1$ باشد.

14- Pathline

مثال ٦-٧

برای میدان سرعت مثال قبل، خط مسیر ذره‌ای که در زمان t_0 در (X_1, X_2, X_3) قرار داشته را به دست آورید.

حل: از $\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{(1+t)}$، داریم: $\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{1+t}$

بنابراین، $\mathrm{Ln}x_1 - \mathrm{Ln}X_1 = \mathrm{Ln}(1+t) - \mathrm{Ln}(1+t_0)$، یعنی:

$$x_1 = X_1 \frac{1+t}{1+t_0}.$$

به طور مشابه، از $\frac{dx_2}{dt} = x_2$، داریم: $\int_{X_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_{t_0}^{t} dt.$

پس:

$$x_2 = X_2 e^{t-t_0}$$

و واضح است که: $x_3 = X_3$

(iii) جریان پایدار و ناپایدار

به **جریانی پایدار**[۱۵] گفته می‌شود که در یک موقعیت مکانی **ثابت**، هیچ چیزی با زمان تغییر نکند. در غیر این صورت، جریان‌ناپایدار خواهدبود.به هر حال، توجه به این مهم است که در یک جریان پایدار، سرعت، شتاب، درجه حرارت، و غیره ـ از یک ذره داده شده ـ در حالت کلی، با زمان تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، فرض کنید ψ متغیری وابسته باشد. آن‌گاه در یک جریان پایدار $\left(\frac{D\psi}{Dt}\right)_{x\text{-fixed}}=0$، اما $\frac{D\psi}{Dt}$ در حالت کلی صفر نیست. به عنوان مثال، جریان پایدار داده‌شده توسط میدان سرعت:

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad v_3 = 0$$

دارای میدان شتاب زیر است:

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0 + x_1(1) + 0 + 0 = x_1,$$

$$a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0 + 0 + (-x_2)(-1) + 0 = x_2,$$

$$a_3 = 0.$$

همچنین توجه کنید که برای جریان پایدار، خطوط مسیر بر خطوط جریان منطبق می‌شوند.

15- Steady

(iv) جریان آرام[۱۶] و مغشوش[۱۷]

جریان آرام، یک جریان بسیار منظم است که در آن، ذرات سیال در لایه‌های هموار، یا ورقه[۱۸]، روی ذرات لایه‌های مجاور ـ بدون مخلوط شدن با آنها ـ می‌لغزند. چنین جریانی معمولاً در سرعت پایین وجود دارد (هنگامی که کمیات دیگر ثابت است). برای حالتی که آب، در یک لوله با مقطع مدور جریان می‌یابد، رینولد با مشاهدهٔ رگه‌های نازک رنگ در لوله دریافت که اگر پارامتر بدون بعد N_R (به عنوان عدد رینولد مشهور است، با رابطهٔ $N_R = \dfrac{\bar{v}\rho d}{\mu}$ که $\bar{v}$ سرعت متوسط در لوله، d قطر لوله، و ρ و μ چگالی و چسبندگی سیال)، کمتر از مقدار مشخصی باشد (تقریباً ۲۱۰۰) رگه‌های نازک رنگ، در سراسر لوله دست‌نخورده باقی می‌مانند و خطوطی موازی محور لوله تشکیل می‌دهند. در این آزمایش، هر نوع اغتشاش تصادفی، به سرعت محو می‌شد. همزمان با افزایش عدد رینولد، جریان به گونهٔ فزاینده‌ای به اغتشاشات کوچک حساس می‌شود تا این که در مرحله‌ای، رگه‌های رنگ شکسته و در میان آب پخش می‌شوند. این پدیدهٔ به‌هم پیوسته و نامنظم ذرات سیال در جریان، اغتشاش نامیده می‌شود. در حالت جریان در لوله، حد بالای عدد رینولد (که فراتر از آن، جریان مغشوش است) تامعین می‌باشد. با تنظیم آزمایش و بسته به آرامش دو لبهٔ سیال، این حد بالا، می‌تواند تا ۱۰۰۰۰۰ برسد.

در بخشهای بعد، مطالعه خود را به جریانهای آرام محدود می‌سازیم. از این رو، حلهای ارائه‌شده، تنها در محدوده خاصی از پارامترهای حاکم بر پایداری جریان (نظیر عدد رینولد)، معتبرند.

۶-۹- مثالهایی از جریانهای آرام یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر

الف- جریان کوئت مسطح

جریان یک‌جهته پایدار ـ تحت گرادیان فشار صفر در جهت جریان ـ از یک جریان چسبنده تراکم‌ناپذیر بین دو ورق افقی با امتداد بی‌نهایت (که یکی ثابت و دیگری در صفحه خود با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند)، به عنوان **جریان مسطح کوئت**[۱۹] شناخته می‌شود.

16- Laminar

17- Turbulent

18- Laminae

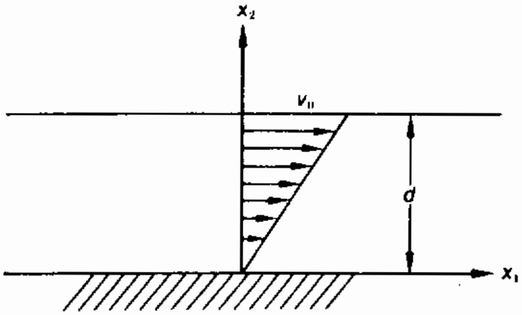
19- Plane couette flow

فرض کنید جهت جریان x_1 باشد. در این صورت، میدان سرعت برای جریان تخت کوئت دارای شکل زیر است:

$$v_1 = v(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

از معادلات ناویر ـ استوکس و شرایط مرزی $v(0) = 0$ و $v(d) = v_0$، می‌توان نشان داد که (این را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم)

$$v(x_2) = \frac{v_0 x_2}{d}. \tag{۲۲-۶}$$



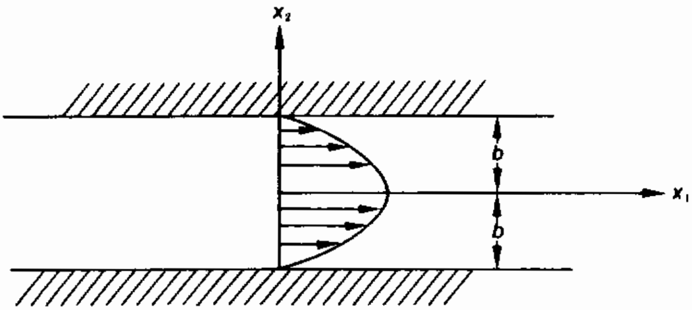
شکل ۶-۲

ب ـ جریان پوسوله مسطح

جریان یک‌جهته پایدار، از یک سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر، در یک کانال با دو دیوار تخت موازی و به طول بی‌نهایت، به عنوان **جریان پوسوله مسطح**[20] شناخته می‌شود.

فرض کنید که جهت جریان x_1 باشد. در این صورت، میدان سرعت برای جریان پوسوله مسطح عبارت است از:

$$v_1 = v(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$



شکل ۶-۳

20- Plane poiseuille flow

از معادلات ناویر ـ استوک و شرایط مرزی $v(-b) = v(+b) = 0$ ، می‌توان نشان داد (به عنوان تمرین واگذار می‌شود) که ثابت = $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ و

$$v(x_2) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)(b^2 - x_2^2). \tag{۶-۲۳}$$

پ ـ جریان هاگن ـ پوسوله

آنچه جریان هاگن ـ پوسوله خوانده می‌شود، جریانی است یک‌جهته، پایدار و با تقارن محوری، در یک استوانه مدور. بنابراین، میدان سرعت آن به شکل زیر است:

$$v_1 = v(r), \quad r^2 = x_2^2 + x_3^2, \quad v_2 = v_3 = 0.$$

واضح است که این میدان سرعت، معادله پیوستگی را برای هر $v(r)$ ارضا می‌کند.

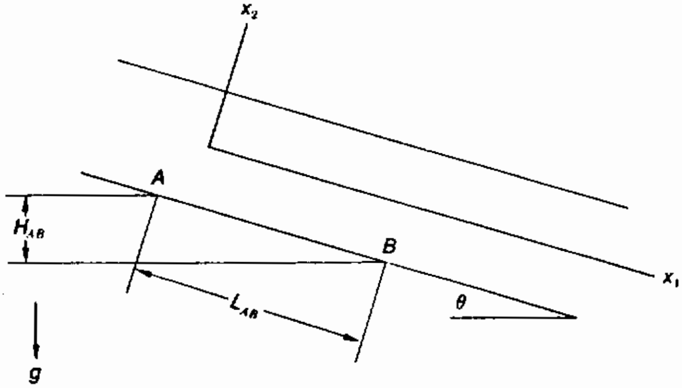
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

برای ارضای معادله حرکت، داریم (شکل ۶-۴ را ببینید)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g \sin\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right), \tag{i}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g \cos\theta. \tag{ii}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}. \tag{iii}$$



شکل ۶-۴

از معادله (iii) مشخص می‌شود که p مستقل از x_3 است. چون $\rho g \cos\theta$ ثابت است، از معادله (ii) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right) = 0.$$

با تغییر مرتبه دیفرانسیل‌گیری، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) = 0.$$

علاوه بر آن، از معادله (i) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho g \sin\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right)\right] = 0.$$

(تذکر: v تابع x_1 نیست) بنابراین $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ مستقل از x_1 و x_2 و x_3 می‌باشد. به عبارت دیگر، ثابت $= \frac{\partial p}{\partial x_1}$ به طوری که برای هر دو نقطه A و B نظیر آن چه نشان داده شده $\frac{\partial p}{\partial x^1} = \frac{(p_B - P_A)}{L_{AB}}$. پس معادله (i) می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho g \sin\theta\right)$$

اگر ثابت

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho g \sin\theta\right)$$

را با β نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \beta. \qquad \text{(iv)}$$

حال چون $v_1 = v(r),\ r^2 = x_2^2 + x_3^2$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}\frac{dv}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + x_2\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{x_2^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right).$$

به طور مشابه:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{x_3^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right).$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right) = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right),$$

و معادله (iv) می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=\beta.$$

بنابراین:

$$\frac{dv}{dr}=\beta\frac{r}{2}+\frac{b}{r}.$$

با انتگرال‌گیری مجدد، به دست می‌آید:

$$v=\frac{\beta r^2}{4}+b\ln r+c.$$

چون v باید در ناحیه جریان، مقید باشد، پس $b=0$. شرط غیرلغزشی در دیواره استوانه نیازمند آن است که

$$v=0 \qquad \text{در} \quad r=\frac{d}{2}$$

بنابراین:

$$c=-\beta\left(\frac{d^2}{16}\right)$$

و

$$v=-\frac{\beta}{4}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right), \tag{۲۴-۶}$$

که

$$\beta=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}-\rho g\sin\theta\right).$$

معادله فوق مبین آن است که سرعت در سطح مقطع، به شکل یک سهموی حاصل از دوران، توزیع می‌شود. حداکثر سرعت برابر است با (در $r=0$):

$$v_{\max}=-\frac{\beta d^2}{16}. \tag{۲۵-۶}$$

سرعت متوسط عبارت است از

$$\bar{v}=\frac{1}{(\pi d^2/4)}\int_A v\,dA=-\frac{\beta d^2}{32}=\frac{1}{2}v_{\max}, \tag{۲۶-۶}$$

و نرخ حجمی جریان Q برابر است با:

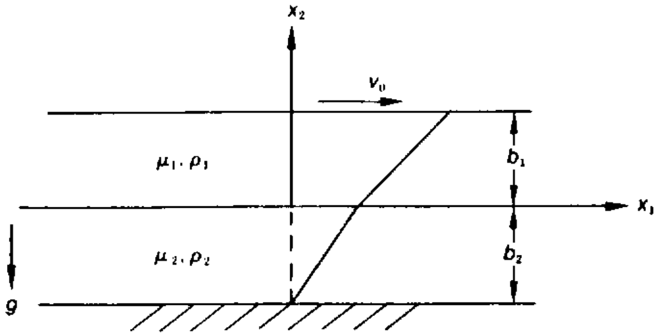
$$Q=\bar{v}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)=-\frac{\beta\pi d^4}{128}, \tag{۲۷-۶}$$

هنگامی که $\theta=0$ (یعنی یک لوله افقی) داریم:

$$Q=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}\left(\frac{\pi d^4}{128}\right). \tag{۲۷-۶ الف}$$

ت ـ جریان مسطح کوئت از سیالات تراکم‌ناپذیر دولایه

فرض کنید که چسبندگی و چگالی لایه بالا، μ_1 و ρ_1 و برای لایهٔ پایین، μ_2 و ρ_2 باشد. همچنین، x_1 جهت جریان و $x_2=0$ مرز دو لایه باشد. بدین ترتیب، جریانهای یک‌جهته و



شکل ۶-۵

پایدار دو لایه را بین ورقهای نامحدود $x_2=+b_1$ و $x_2=-b_2$ بررسی می‌کنیم. ورق $x_2=-b_2$ ثابت و ورق $x_2=+b_2$ در صفحه خود با سرعت v_0 حرکت می‌کند. گرادیان فشار در جهت جریان صفر فرض می‌شود.

توزیع سرعت در لایه بالا را به صورت زیر فرض کنید:

$$v_1^{(1)} = v^{(1)}(x_2), \quad v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0.$$

و برای لایه پایین:

$$v_1^{(2)} = v^{(2)}(x_2), \quad v_2^{(2)} = v_3^{(2)} = 0.$$

واضح است که معادلات پیوستگی ارضا می‌شود. از معادلات ناویر ـ استوک داریم:

برای لایه ۱،

$$0 = \mu_1 \frac{d^2 v^{(1)}}{dx_2{}^2}, \tag{i}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2} - \rho_1 g, \tag{ii}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3}. \tag{iii}$$

برای لایه ۲ ،

$$0 = \mu_2 \frac{d^2 v^{(2)}}{d{x_2}^2}, \tag{iv}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_2} - \rho_2 g, \tag{v}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_3} \tag{vi}$$

از معادله (i) تا (iii)، $v^{(1)}=A_1x_2+B_1$، و $p^{(1)}=-p_1gx_2+C_1$. از معادلات (iv) تا (vi)، $v^{(2)}=A_2x_2+B_2$ و $p^{(2)}=-p_2gx_2+C_2$. چون ورق پایینی ثابت است، در $x=-b_2$، $v^{(2)}=0$، و داریم:

(الف) $$B_2 = A_2 b_2.$$

چون ورق فوقانی با سرعت v_0 به طرف راست حرکت می‌کند، در $x=-b_1$، $v^{(1)}=v_0$، داریم:

(ب) $$B_1 = v_0 - A_1 b_1.$$

در مرز $x_2=0$، باید داشته باشیم $v^{(1)}=v^{(2)}$ به‌طوری که هیچ‌گونه لغزشی در مرز سیال وجود نداشته‌باشد، پس

(پ) $$B_1 = B_2$$

علاوه بر این، از قانون سوم نیوتن، روی $x_2=0$، بردارهای تنش روی دو لایه، توسط رابطه زیر مرتبط می‌شوند:

$$\mathbf{t}^{(1)}_{-\mathbf{e}_2} = -\mathbf{t}^{(2)}_{+\mathbf{e}_2}.$$

برحسب تانسورهای تنش، داریم $\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{e}_2=\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{e}_2$. یعنی:

$$T^{(1)}_{12} = T^{(2)}_{12}, \quad T^{(1)}_{22} = T^{(2)}_{22}, \quad \text{و} \quad T^{(1)}_{32} = T^{(2)}_{32}.$$

به عبارت دیگر، این مؤلفه‌های تنش، باید در امتداد مرز دو سیال پیوسته باشند.

چون:

$$T^{(1)}_{12} = 2\mu_1 D^{(1)}_{12} = \mu_1 \frac{dv^{(1)}}{dx_2} = \mu_1 A_1,$$

$$T^{(2)}_{12} = 2\mu_2 D^{(2)}_{12} = \mu_1 \frac{dv^{(2)}}{dx_2} = \mu_2 A_2,$$

و $T_{12}^{(1)}=T_{12}^{(2)}$ می‌دهد:

$$\mu_1 A_1 = \mu_2 A_2 \qquad \text{(ت)}$$

توجه کنید که این شرط، به معنای آن است که شیب پروفیل سرعت در $x_2=0$ پیوسته نیست. همچنین

$$T_{22}^{(1)} = -p^{(1)} + 2\mu_1 D_{22}^{(1)} = -p^{(1)}$$

و

$$T_{22}^{(2)} = -p^{(2)},$$

به طوری که $T_{22}^{(1)}=T_{22}^{(2)}$ در $x_2=0$ می‌دهد $C_1 = C_2 \equiv p_0$. چون $T_{32}^{(1)}=0$ و $T_{32}^{(2)}=0$، شرط $T_{32}^{(1)}=T_{32}^{(2)}$ به وضوح ارضا می‌شود.

از معادلات (الف تا ت)، به دست می‌آید:

$$A_1 = \frac{\mu_2 v_0}{(\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2)},$$

$$A_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} A_1 = \frac{\mu_1 v_0}{(\mu_1 b_2 + \mu_2 b_1)},$$

و

$$B_2 = B_1 = \frac{\mu_1 b_2 v_0}{(\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2)}.$$

بنابراین، توزیع سرعت عبارت است از:

$$v_1^{(1)} = \frac{1}{(\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2)} (\mu_2 v_0 x_2 + \mu_1 v_0 b_2), \quad v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = 0, \qquad \text{(۶-۲۸ الف)}$$

و

$$v_1^{(2)} = \frac{1}{(\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2)} (\mu_1 v_0 x_2 + \mu_1 v_0 b_2), \quad v_2^{(2)} = v_3^{(2)} = 0. \qquad \text{(۶-۲۸ ب)}$$

توجه کنید که $b_2=0$، $v_1^{(1)}=(v_0/b_1)x_2$ معرف جریان کوئت مسطح برای یک سیال منفرد می‌باشد.

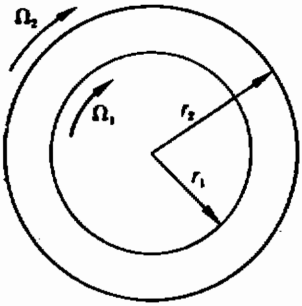
ث ـ جریان کوئت

جریان پایدار و آرام (یا لایه‌لایه) دوبعدی از یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر بین دو استوانه طویل هم‌محور (ناشی از دوران یکی یا هر دو استوانه‌ها با سرعت زاویه‌ای ثابت) به عنوان **جریان کوئت**[۲۱] شناخته می‌شود.

21- Coutte flow

برای این جریان، میدان سرعت را به شکل زیر ـ در مختصات استوانه‌ای ـ در نظر می‌گیریم:

$$v_r = 0, \quad v_\phi = v(r), \quad v_z = 0.$$



شکل ٦-٦

واضح است که این میدان سرعت، معادله پیوستگی را (بدون توجه به اینکه $v(r)$ چیست) ارضا می‌کند [معادله (٦-١٩)].

در غیاب نیروهای حجمی و با احتساب تقارن دورانی جریان (یعنی، هیچ چیزی وابسته به ϕ نیست)، از دومین معادله حرکت داریم [معادله (٦-١٨ ب)]:

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}=0.$$

به سادگی اثبات می‌شود که $v=r$ و $v=\frac{1}{r}$ معادلهٔ فوق را ارضا می‌کنند. بنابراین پاسخ عمومی عبارت است از:

$$v = Ar+\frac{B}{r},$$

فرض کنید که r_1 و r_2 به‌ترتیب شعاعهای استوانه داخلی و خارجی و نیز Ω_1 و Ω_2 سرعتهای زاویه‌ای مربوطه باشند، آن‌گاه:

$$r_1\Omega_1 = Ar_1+\frac{B}{r_1}$$

و:

$$r_2\Omega_2 = Ar_2+\frac{B}{r_2},$$

و از آن جا ثابتهای A و B به دست می‌آیند:

$$A = \frac{\Omega_2r_2^2-\Omega_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}, \quad B = \frac{r_1^2r_2^2(\Omega_1-\Omega_2)}{r_2^2-r_1^2},$$

به طوری که:

$$v_\phi = v = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[r(\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r}(\Omega_2 - \Omega_1)\right] \qquad (۶-۲۹)$$

و $v_r = v_z = 0$

تنش برشی در دیواره، برابر است با:

$$\left[\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]_{r=r_1, r_2}$$

و به سادگی از معادله ۶-۲۹ دیده می‌شود که اگر $\Omega_1=0$ و $\Omega_2=\Omega$ (یا $\Omega_2=0$ و $\Omega_1=\Omega$)، گشتاور بر واحد طول مورد نیاز برای حفظ جریان، عبارت است از:

$$M = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 \Omega}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (۶-۳۰)$$

ج- جریان نزدیک یک ورق در حال نوسان

جریان موازی، دوبعدی و ناپایدار زیر را در نظر بگیرید:

$$v_1 = v(x_2, t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0. \qquad (۶-۳۱)$$

با صرف نظر از نیروهای حجمی و فرض یک میدان فشار ثابت، تنها معادله غیر صفر حرکت، عبارت است از:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}. \qquad (۶-۳۲)$$

به سادگی می‌توان اثبات نمود که:

$$v = a e^{-\beta x_2} \cos(\omega t - \beta x_2 + \epsilon) \qquad (۶-۳۳\text{الف})$$

معادله فوق ارضا می‌شود اگر:

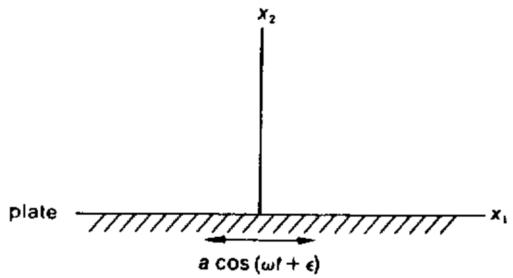
$$\beta = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}}. \qquad (۶-۳۳\text{ب})$$

از معادله (۶-۳۳ الف)، سرعت سیال در $x_2=0$ عبارت است از: $v = a\cos(\omega t + \epsilon)$.

بنابراین، پاسخ (۶-۳۳ الف و ب) میدان سرعت[۲۲] یک مایع با امتداد بی‌نهایت را نشان می‌دهد که در

۲۲. نوسانات حالت پایدار

ناحیه $x_2 \geq 0$ قرار گرفته و توسط ورق $x_2=0$ محدود شده‌است و نوسانات ساده هارمونیک را با دامنه a و فرکانس مدور ω ایجاد می‌کند. این، یک موج عرضی به طول موج $\frac{2\pi}{\beta}$ را نشان می‌دهد که از مرز، به طرف داخل و با سرعت فاز $\frac{\omega}{\beta}$ و با دامنه‌ای که به سرعت رو به کاهش است (کاهش در حوزه یک طول موج به نسبت $e^{-2\pi}=\frac{1}{535}$) منتشر می‌شود. بنابراین، دیده می‌شود که تأثیر چسبندگی، تنها به مسافت کوچکی از ورق (در حال نوسان سریع با دامنه کوتاه a) محدود می‌شود.



شکل ٦-٧

٦-١٠- نرخ کار انجام‌شده روی یک ذره

با مراجعه به مکعب مستطیل بی‌نهایت کوچک شکل ۴-۸، نرخ کار انجام‌شده توسط بردارهای تنش و نیروی حجمی، روی ذره در حال حرکت (که در خلال حرکت تغییر شکل نیز می‌دهد) را محاسبه می‌کنیم.

نرخ کار انجام‌شده توسط بردارهای تنش $\mathbf{t}_{-e_1}$ و $\mathbf{t}_{e_1}$ روی وجوهی با عمود $-\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_1$، عبارت است از[۲۳]:

$$[(\mathbf{t}_{e_1}\cdot\mathbf{v})_{x_1+dx_1,x_2,x_3}-(\mathbf{t}_{e_1}\cdot\mathbf{v})_{x_1,x_2,x_3}]\,dx_2\,dx_3,$$

که چیزی نیست جز:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{t}_{e_1}\cdot\mathbf{v})\,dx_1dx_2dx_3. \qquad \text{(i)}$$

۲۳. نرخ کار توسط $\mathbf{t}_{e_1}$ برابر $(\mathbf{t}_{e_1}dx_2dx_3).\mathbf{v}$ و نرخ کار به‌وسیله $\mathbf{t}_{-e_1}$ برابر $(\mathbf{t}_{-e_1}dx_2dx_3).\mathbf{v}$ می‌باشد و عبارت است از: $(-\mathbf{t}_{e_1}dx_2dx_3).\mathbf{v}$

چون $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{T}\mathbf{e}_1\cdot v_i\mathbf{e}_i=v_i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_1=v_iT_{i1}$، عبارت (i) خواهدشد:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(v_iT_{i1})\right]dV, \tag{ii}$$

که $dV=dx_1dx_2dx_3$ دیفرانسیل حجم را نشان می‌دهد. به طور مشابه، کار انجام‌شده توسط بردارهای تنش، روی دو وجه دیگر عبارت هستند از:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_iT_{i2})\right]dV \quad \text{و} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_3}(v_iT_{i3})\right]dV.$$

با انضمام نرخ کار انجام‌شده توسط نیروی حجمی ($\rho\mathbf{B}dV\cdot\mathbf{v}=\rho B_iv_idV$) کل نرخ کار انجام‌شده روی ذره برابر است با:

$$P=\frac{\partial}{\partial x_j}(v_iT_{ij})dV+\rho B_iv_idV. \tag{iii}$$

با استفاده از رابطه:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v_iT_{ij})=v_i\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

معادله (iii) شکل زیر را خواهدداشت:

$$P=v_i\left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho B_i\right]dV+T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV. \tag{۶-۳۴}$$

به‌هر حال معادله حرکت خواهدبود:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho B_i=\rho\frac{Dv_i}{Dt}$$

بنابراین داریم:

$$P=v_i\frac{Dv_i}{Dt}\rho dV+T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV. \tag{۶-۳۵}$$

نخستین جمله در طرف راست معادله (۶ـ۳۵) نمایشگر نرخ تغییر انرژی جنبشی ذره می‌باشد که به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(KE)\equiv\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}(\rho dV)v_iv_i\right]&=\frac{1}{2}(\rho dV)v_i\frac{Dv_i}{Dt}+\frac{1}{2}v_i\frac{D}{Dt}[(\rho dV)v_i]\\&=\frac{1}{2}(\rho dV)v_i\frac{Dv_i}{Dt}+\frac{1}{2}(\rho dV)v_i\frac{Dv_i}{Dt}+\frac{1}{2}v_iv_i\frac{D(\rho dV)}{Dt}\\&=(\rho dV)v_i\frac{Dv_i}{Dt}.\end{aligned}$$

بنابراین:

$$P = \frac{D}{Dt}(KE) + T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV. \qquad (۳۶-۶)$$

جمله دوم در طرف راست معادله، نمایش‌دهنده نرخی است که کار انجام‌شده، موجب تغییر حجم و شکل ذره می‌شود. با $T_{ij}=-p\delta_{ij}+T'_{ij}$، این جمله می‌شود:

$$T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dV + T'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV.$$

برای یک سیال تراکم‌ناپذیر، هیچ گونه تغییر حجمی وجود ندارد و

$$\begin{aligned} T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= T'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= 2\mu D_{ij}(D_{ij}+W_{ij}) = 2\mu D_{ij}D_{ij} \\ &= 2\mu(D_{11}^2+D_{22}^2+D_{33}^2+2D_{12}^2+2D_{13}^2+2D_{23}^2). \end{aligned} \qquad (۳۷-۶)[24]$$

این کار انجام‌شده، بر واحد حجم، بر واحد زمان و برای تغییر شکل است. این قسمت از کار، بدون توجه به این که D_{ij} ها برحسب زمان چگونه تغییر می‌کنند، با زمان انباشته می‌شود (فقط برای حرکتهای جسم صلب، صفر است) و نمایشگر نرخی است که تحت آن، کار به حرارت تبدیل می‌شود. بنابراین، $\mu \geq 0$ و تابع

$$\Phi_{inc} = 2\mu(D_{11}^2+D_{22}^2+D_{33}^2+2D_{12}^2+2D_{13}^2+2D_{23}^2) \qquad (۳۸-۶)$$

به عنوان تابع اتلاف[25] برای یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر مشهور است. به سادگی می‌توان دید که برای یک سیال تراکم‌پذیر:

$$T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p\Delta + \lambda\Delta^2 + \Phi_{inc} \equiv -p\Delta + \Phi. \qquad (۳۹-۶)$$

که $\Phi=\lambda(D_{11}+D_{22}+D_{33})^2+\Phi_{inc}$ تابع اتلاف برای یک سیال تراکم‌پذیر است.

---

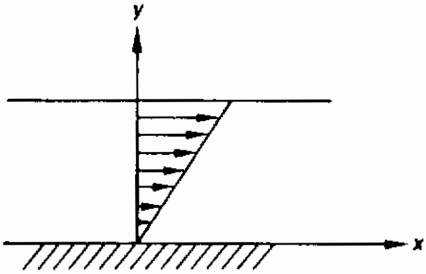
۲۴. چون $D_{ij}=D_{ji}$ و $W_{ij}=-W_{ji}$ بنابراین: $D_{ij}W_{ij}=0$

25- Dissipation function

مثال ۶-۸

برای جریان برشی ساده با $v_1 = kx_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$

نرخی را که تحت آن، کار به حرارت تبدیل می‌شود بیابید، اگر سیال داخل ورقها آب باشد با $(0.958 \quad \text{mPa.s}) \quad 1b\frac{sec}{ft} \quad \mu=2x10^{-5}$ ، و معکوس ثانیه $k=1$



شکل ۶-۸

حل: چون تنها مؤلفه غیرصفر تانسور نرخ تغییر شکل، عبارت است از: $D_{12} = \frac{k}{2}(\sec)^{-1}.$

بنابراین، از معادله (۶-۳۸) $\Phi_{inc} = 4\mu D_{12}^2 = \mu k^2 = 2\times 10^{-5}\frac{\text{ft-lb}}{(\text{ft})^3}\Big/\text{sec.}\ (0.958 \times 10^{-3}\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{m}^3}/\text{sec})$

بنابراین، در هر ثانیه بر فوت مکعب از آب، حرارت ایجادشده توسط چسبندگی (ژول بر متر مکعب بر ثانیه $(0.958x10^{-3}$ B.T.U $2.5x10^{-8}$می‌باشد.

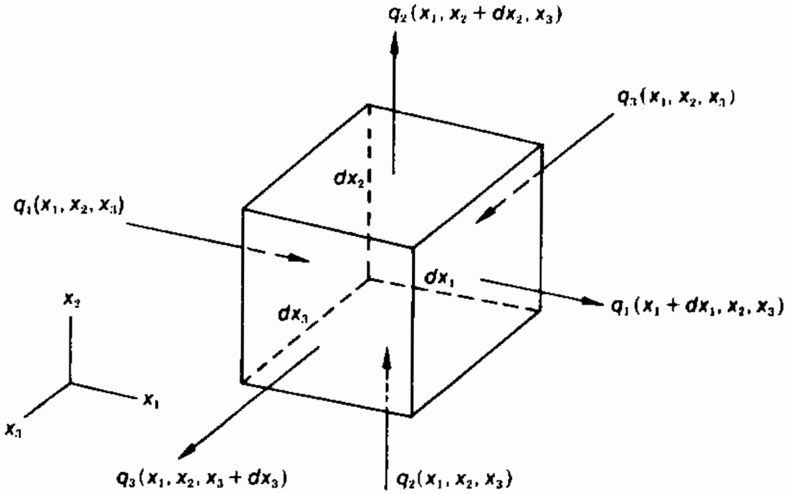
۶-۱۱- نرخ سیلان حرارت به داخل یک المان

فرض کنید q برداری باشد که مقدار آن، معرف نرخ سیلان حرارتی از واحد مساحت باشد (که هم‌جهت با سیلان حرارتی است). پس سیلان حرارت خالص Q، به یک دیفرانسیل المان را به‌صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

با مراجعه به مکعب مستطیل بی‌نهایت کوچک شکل (۶-۹)، نرخ خالص سیلان (که تحت آن، حرارت به داخل المان در امتداد وجه با عمود e_1 سیلان می‌یابد) برابر است با $\{(-q.e_1).x_1+dx_1,x_2,x_3\}dx_2dx_3$ و در امتداد وجه با عمود $-e_1$ - به سوی خارج - برابر می‌شود با . $\{(q.e_1).x_1+dx_1,x_2,x_3\}dx_2dx_3$

بنابراین، نرخ خالص جریان ورودی به دو وجه، با q_1=q.e$_1$، توسط عبارت زیر داده‌می‌شود:

$$-[q_1(x_1+dx_1, x_2, x_3) - q_1(x_1, x_2, x_3)]dx_2dx_3,$$



شکل ٦-۹

که چیزی نیست جز $\frac{\partial q_1}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3$. به طور مشابه، نرخ خالص حرارت ورودی، از طریق دو وجه دیگر برابر است با:

$$-\frac{\partial q_2}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3 \quad \text{and} \quad -\frac{\partial q_3}{\partial x_3}dx_1dx_2dx_3,$$

بنابراین، کل نرخ خالص حرارت وروری برابر است با:

$$Q=-\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial q_2}{\partial x_2}+\frac{\partial q_3}{\partial x_3}\right)dV=-(\operatorname{div}\mathbf{q})\,dV. \qquad (۶-۴۰)$$

مثال ٦-۹

با استفاده از قانون هدایت حرارتی فوریه $\mathbf{q}=-k\nabla\theta$ (که $\nabla\theta$ گرادیان درجه حرارت و $\mathbf{K}$ ضریب رسانایی حرارتی است) معادله حاکم بر حالت پایدار توزیع درجه حرارت را بیابید.

حل: از معادله (٦-۴۰)، داریم، نرخ خالص ورودی بر واحد حجم، توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)\right].$$

حال، اگر مرزهای جسم در دمای ثابت نگه‌داشته شوند، در حالت پایدار نرخ خالص سیلان حرارتی ـ به داخل هر المان در جسم ـ باید صفر باشد. بنابراین، معادله مورد نظر، عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)=0.$$

برای K ثابت، این معادله به معادله لاپلاس تقلیل می‌یابد:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}=0.$$

۶-۱۲- معادله انرژی

ذره‌ای را با دیفرانسیل حجم dV در موقعیت x و در زمان t در نظر بگیرید. فرض کنید U انرژی داخلی، KE انرژی جنبشی، Q نرخ سیلان حرارتی به داخل ذره ـ از محیط اطراف آن ـ و P نرخ کار انجام‌شده توسط نیروهای حجمی و نیروهای سطحی روی ذره (یعنی P توان مکانیکی ورودی است) باشند. پس در غیاب انرژیهای دیگر، قانون بنیادی بقای انرژی بیان می‌کند که

$$\frac{D}{Dt}(U+KE)=P+Q. \qquad (۶-۴۱)$$

از معادله (۶-۳۶) از بخش ۶-۱۰ و معادله (۶-۱۱) از بخش ۶-۱۱ داشتیم:

$$P=\frac{D}{Dt}(KE)+T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV \quad \text{و} \quad Q=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV,$$

و اگر u نشانگر انرژی داخلی بر واحد جرم باشد، به طوری که $U=u(\rho dV)$ و

$$\frac{DU}{Dt}=\rho dV\frac{du}{dt} \qquad \left(\text{توجه شود}\ \frac{D}{Dt}(\rho dV)=0\right)$$

پس معادله انرژی (۶-۴۱) می‌شود:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \qquad (۶-۴۲)$$

اگر جریان حرارتی، تنها در اثر هدایت‌مبتنی بر قانون فوریه $q=-k\nabla\theta$ (که در آن، θ دما است) رخ دهد، آن‌گاه معادله (۶-۴۲)، با فرض ثابت‌بودن ضریب رسانایی حرارتی K ، می‌شود:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_j}. \qquad (۶-۴۳)$$

برای یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، اگر فرض کنید که انرژی درونی بر واحد جرم، توسط $c\theta$ داده‌شود (که c حرارت مخصوص بر واحد جرم است) آن‌گاه معادله (۶-۴۳) می‌شود:

$$\rho c\frac{D\theta}{Dt}=\Phi_{\text{inc}}+\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_j}, \qquad (۶-۴۴)$$

که از معادله (۶-۳۸) $\Phi_{\text{inc}}=2\mu(D_{11}^2+D_{22}^2+D_{33}^2+D_{12}^2+D_{13}^2+D_{23}^2)$ نمایشگر حرارت

ایجادشده از طریق نیروهای لزجت است.

موقعیتهای متعددی وجود دارد که در آنها، حرارت ایجادشده ـ از طریق عمل لزجت یا چسبندگی ـ در مقایسه با حرارت ناشی از هدایت حرارتی از طریق مرزها، بسیار کوچک است که در این حالت، معادله (۶-۲۴) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}, \qquad (۶-۴۵)$$

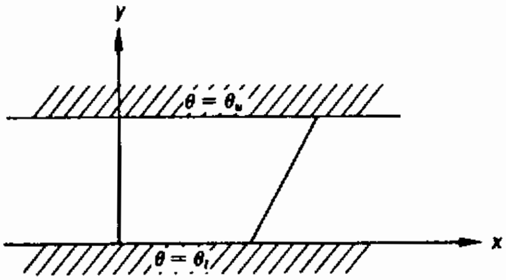
که در آن، $\alpha \equiv \frac{k}{\rho}$ = ضریب پخش حرارتی[26] است.

مثال ۶-۱۰

سیالی، بین دو ورق به طول بی‌نهایت، در حال سکون است. اگر ورق پایین، در دمای ثابت θ_l و ورق بالا در دمای θ_u نگه‌داشته شود، توزیع دمای حالت پایدار را بیابید.

حل: معادله لاپلاس، بر توزیع حالت پایدار حاکم است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0.$$



شکل ۶-۱۰

که در این مساله، معادله فوق به شکل زیر تقلیل می‌یابد.

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} = 0.$$

بنابراین

$$\frac{d\theta}{dy} = C_1$$

و

$$\theta = C_1 y + C_2.$$

26- Thermal diffusivity

با استفاده از شرط مرزی ($\theta=\theta_l$ در $y=0$ و $\theta=\theta_u$ در $y=d$) ثابتهای انتگرال‌گیری محاسبه می‌شوند:

$$C_1 = \frac{\theta_u - \theta_l}{d},$$

$$C_2 = \theta_l.$$

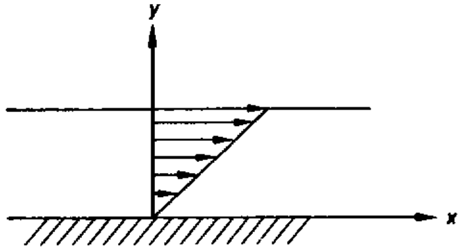
توجه کنید که در این‌جا هنگامی که مقادیر θ روی ورقها، از پیش توصیف شوند، مقادیر $\frac{d\theta}{dy}$ روی ورقها به طور کامل محاسبه می‌شوند. در حقیقت، $\frac{d\theta}{dy} = \frac{(\theta_u-\theta_l)}{d}$ و مبین این است که در مساله هدایت حرارتی حالت پایدار (با معادله‌حاکمه لاپلاس) در حالت‌کلی، این ممکن نیست که هر دو مقادیر θ و مشتقات عمودی θ را در همان نقاط ـ از تمام مرز ـ توصیف نماییم، مگر این که با هم سازگار باشند.

مثال ٦-١١

جریان کوئت مسطح، توسط توزیع سرعت زیر داده می‌شود:

$$v_1 = ky, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

اگر درجه حرارت، ورق پایینی در θ_l و دمای ورق بالا در θ_u نگه داشته‌شود، توزیع حالت پایدار درجه حرارت را بیابید.



شکل ٦-١١

حل: در پی توزیع درجه حرارتی هستیم که فقط وابسته به y باشد. چون $D_{12} = \frac{k}{2}$، از معادله (٦-۴۴) داریم:

$$0 = \mu k^2 + \kappa \frac{d^2\theta}{dy^2}.$$

بنابراین:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = -\frac{\mu k^2}{\kappa},$$

که می‌دهد:

$$\theta = -\frac{\mu k^2}{\kappa}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2,$$

که C_1 و C_2 ثابتهای انتگرال‌گیری هستند. حال در $y=0$، $\theta=\theta_l$ و در $y=d$، $\theta=\theta_u$، بنابراین: $\theta_l = C_2$

و

$$\theta_u = -\frac{\mu k^2}{\kappa}\frac{d^2}{2} + C_1 d + \theta_l,$$

که از آن:

$$C_1 = \frac{\theta_u}{d} + \frac{\mu k^2 d}{2\kappa} - \frac{\theta_l}{d}.$$

بنابراین توزیع دما توسط رابطه زیر داده‌می‌شود:

$$\theta = -\frac{\mu k^2}{2\kappa}y^2 + \left(\frac{\theta_u - \theta_l}{d} + \frac{\mu k^2 d}{2\kappa}\right)y + \theta_l.$$

۶-۱۳- بردار چرخش[۲۷]

با مراجعه به فصل ۳ درمی‌یابیم که بخش پادمتقارن گرادیان سرعت $(\nabla \mathbf{v})$ توسط تانسور اسپین $\mathbf{W}$ تعریف می‌شود. پادمتقارن‌بودن تانسور $\mathbf{W}$، از آن جهت که $\mathbf{W}\mathbf{x}=\omega \times \mathbf{x}$، معادل یک بردار $\bar{\omega}$ است (بخش ب ۱۱ را ببینید). در حقیقت، $\omega=-(W_{23}\mathbf{e}_1+W_{31}\mathbf{e}_2+W_{12}\mathbf{e}_3)$. چون $d\mathbf{v}=(\mathbf{D}+\mathbf{W})d\mathbf{x}=\mathbf{D}d\mathbf{x}+\mathbf{W}d\mathbf{x}=\mathbf{D}d\mathbf{x}+\omega \times d\mathbf{x}$، بردار ω، بردار سرعت زاویه‌ای آن بخش از حرکت است که چرخش جسم صلب، در مجاورت بی‌نهایت نزدیک به یک نقطه مادی را نشان می‌دهد. تفسیر جالب دیگر از ω آن است که این بردار، سرعت زاویه‌ای محورهای اصلی $\mathbf{D}$ می‌باشد (که ما در زیر نشان می‌دهیم):

فرض کنید که $d\mathbf{x}$ یک المان مادی در زمان t و در جهت $\mathbf{n}$ باشد، یعنی: $\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$،

که ds طول $d\mathbf{x}$ است. حال

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{n} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) = \frac{1}{ds}\left(\frac{D}{Dt}d\mathbf{x}\right) - \frac{1}{ds^2}\left[\frac{D}{Dt}(ds)\right]d\mathbf{x}. \qquad (۶-۴۶)$$

اما از معادله (۳-۲۰) و معادله (۳-۲۲)، داریم:

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{v})d\mathbf{x} = (\mathbf{D}+\mathbf{W})d\mathbf{x}$$

و از معادله (۳-۲۷):

$$\frac{1}{ds}\frac{D}{Dt}(ds) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n}.$$

27- Vorticity vector

بنابراین:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{n} = (\mathbf{D}+\mathbf{W})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n})\mathbf{n}. \qquad (۴۷-۶)$$

حال اگر $\mathbf{n}$ یک بردار ویژه $\mathbf{D}$ باشد، آن‌گاه: $\mathbf{D}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n},$

به طوری که: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\mathbf{n} = \lambda$

و معادله (۶-۴۷) می‌شود:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{n} = \mathbf{W}\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}, \qquad (۴۸-۶)$$

که نتیجه مطلوب است.

برحسب میدان سرعت:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \qquad (۴۹-۶)$$

با حذف ضریب $\frac{۱}{۲}$ در طرف راست معادله (۶-۴۹)، **"بردار چرخش"** ζ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = 2\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \qquad (۵۰-۶)$$

تانسور $2\mathbf{W}$ به عنوان تانسور چرخش شناخته می‌شود.

به صورت نمادگذاری شاخصی، مؤلفه‌های دکارتی ζ عبارت‌اند از:

$$\zeta_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \qquad (۶-۵۱\text{ الف})$$

و به‌شکل پایا

$$\zeta = \operatorname{curl}\mathbf{v}. \qquad (۶-۵۱\text{ ب})$$

و نیز توجه کنید که

$$2W_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\epsilon_{kij}\,\zeta_k. \qquad (۵۲-۶)$$

مثال ۶-۱۲

بردار چرخش را برای جریان برشی ساده زیر بیابید:

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0.$$

حل: داریم:

$$\zeta_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \quad \zeta_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0$$

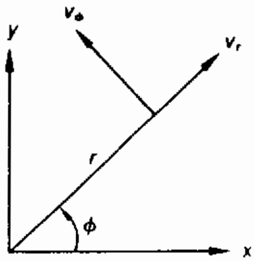
و
$$\zeta_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -k.$$
یعنی:
$$\boldsymbol{\zeta} = -k\mathbf{e}_3.$$

دیده می‌شود که بردار سرعت زاویه‌ای $(=\zeta/2)$ عمود بر صفحه x_1x_2- بوده، علامت منفی به معنای این است که اگر از طرف مثبت x_3 ببینیم، چرخش در جهت عقربه‌های ساعت است.

مثال ٦-۱۳

توزیع بردار چرخش را در جریان کوئت (مطرح‌شده در بخش ٦-۹) پیدا کنید.

حل: با $v_3=v_z=0$ و $v_\phi=Ar+(B/r)$، واضح است که تنها مؤلفه غیرصفر چرخش در جهت z می‌باشد.



شکل ٦-۱۲

با استفاده از:
$$v_x = -v_\phi \sin\phi, \quad v_y = v_\phi \cos\phi, \quad v_z = 0$$

و $r\sin\theta = y$, $r\cos\phi = x$, $r^2=x^2+y^2$ و $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ می‌توان نشان داد که
$$\zeta_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{dv_\phi}{dr} + \frac{v_\phi}{r} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\phi).$$
حال
$$\frac{d}{dr}(rv_\phi) = \frac{d}{dr}(Ar^2+B) = 2Ar.$$
بنابراین:
$$\zeta_z = 2A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

مثال ٦-۱۴

معادله (٦-۵۲) را اثبات کنید.
$$-\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \epsilon_{kij}\zeta_k.$$

حل: برای $i=j$، هر دو طرف، با هم صفر می‌شوند. برای $i\neq j$، اگر $i=1$ و $j=2$
$$-\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = \epsilon_{112}\zeta_1 + \epsilon_{212}\zeta_2 + \epsilon_{312}\zeta_3 = \zeta_3.$$

اگر $i=2$، $j=3$

$$-\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)=\epsilon_{123}\zeta_1+\epsilon_{223}\zeta_2+\epsilon_{323}\zeta_3=\zeta_1$$

و اگر $i=3$، $j=1$

$$-\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=\epsilon_{131}\zeta_1+\epsilon_{231}\zeta_2+\epsilon_{331}\zeta_3=\zeta_2.$$

سه حالت دیگر ($i=2$ ،$j=1$)، ($i=3$ $j=2$)، و ($j=3$، $i=1$)، به‌وضوح صادق‌اند.

۶-۱۴- جریان غیرچرخشی

اگر بردار چرخش (یا معادل آن، تانسور چرخش) متناظر با یک میدان سرعت، در ناحیه‌ای و بازه‌ای از زمان، صفر باشد، جریان، در آن ناحیه و در آن بازه زمانی **غیرچرخشی**[28] گفته می‌شود.

فرض کنید $\Phi(x_1,\ x_2\ \ x_3\ \ t)$ یک تابع عددی بوده، مؤلفه‌های سرعت از Φ، توسط معادله زیر استخراج شود:

$$v_1=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},$$

$$v_2=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \qquad \text{(۶-۵۳ الف)}$$

$$v_3=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_3},$$

یعنی

$$v_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \qquad \text{(۶-۵۳ ب)}$$

آن‌گاه

$$\zeta_1=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3\partial x_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial x_3}=0$$

و به طور مشابه: $\zeta_2=\zeta_3=0$

یعنی، یک تابع عددی $\Phi(x_1,\ x_2\ \ x_3\ \ t)$ توسط معادلات فوق [معادلات (۶-۵۳)] یک میدان جریان غیرچرخشی را تعریف می‌کند. بدیهی است که هر تابع اختیاری Φ، به‌یک میدان سرعت ممکن (از نظر فیزیکی) منجر نمی‌شود. علت آن است که معادله پیوستگی (که مبین اصل بقای جرم

28- Irrotational

است) باید ارضا شود. برای یک سیال تراکم‌ناپذیر، معادله پیوستگی چنین خواهدبود:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (۵۴-۶)$$

بنابراین، با ترکیب معادله (۶ - ۵۳) با معادله (۶ - ۵۴)، معادله لاپلاس را برای Φ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0, \qquad (۶-۵۵ \text{ الف})$$

یعنی:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial {x_3}^3} = 0. \qquad (۶-۵۵ \text{ ب})$$

در دو بخش بعد، شرایطی را که تحت آنها، جریان‌غیرچرخشی (به‌لحاظ دینامیکی برای یک جریان چسبنده و یک جریان‌غیرچسبنده) ممکن است، مورد بحث قرار خواهیم‌داد.

۶-۱۵- جریان غیرچرخشی یک سیال تراکم‌ناپذیر غیرچسبنده با چگالی همگن

تعریف یک جریان غیرچسبنده[29] به صورت زیر است:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}, \qquad (۵۶-۶)$$

که با قراردادن $\mu=0$ در معادله بنیادین (برای سیال چسبنده نیوتنی) حاصل می‌شود.

معادله حرکت برای یک سیال غیرچسبنده عبارت است از:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i \qquad (۶-۵۷ \text{ الف})$$

یا

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{B}. \qquad (۶-۵۷ \text{ ب})$$

معادلات (۶ - ۵۷) به عنوان **معادلات حرکت اولر** شناخته می‌شوند. حال نشان می‌دهیم که جریانات غیرچرخشی، به لحاظ دینامیکی، برای یک سیال غیرچسبنده، تراکم‌ناپذیر و با چگالی همگن، همواره امکان‌پذیر است؛ به شرط آن‌که نیروهای حجمی وارده، از یک پتانسیل Ω، توسط فرمول زیر قابل استخراج باشند:

$$B_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \qquad (۵۸-۶)$$

29- Inviscid

در حالت نیروی جاذبه و فرض این‌که محور x_3- به‌طور عمودی و به سمت بالاست:

$$\Omega = g x_3, \tag{۶-۵۹الف}$$

به طوری که

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \text{and } B_3 = -g. \tag{۶-۵۹ب}$$

با استفاده از معادله (۶-۵۸) و با توجه به این که ρ برای سیال همگن ثابت است، معادله (۶-۵۷) را می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right). \tag{۶-۶۰}$$

برای یک جریان غیرچرخشی داریم:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

به طوری که

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} v_j v_j.$$

یعنی

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} v^2, \tag{۶-۶۱}$$

که $v^2 = v_j v_j = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ مربع سرعت می‌باشد. بنابراین معادله (۶-۶۰) خواهدشد:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right) = 0. \tag{۶-۶۲}$$

معادله (۶-۶۲) مبین آن است که

$$\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)$$

مستقل از x_1، x_2، و x_3 می‌باشد. بنابراین:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = f(t), \tag{۶-۶۳}$$ [۳۰]

که $f(t)$ یک تابع اختیاری از t است.

اگر علاوه بر آن، جریان پایدار نیز باشد، خواهیم‌داشت:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = \text{constant}. \tag{۶-۶۴}$$

۳۰. تابع انتگرال‌گیری $f(t)$ را می‌توان در $\Phi(t)$ ادغام نمود بدون آن که نیازی به تغییر میدان سرعت باشد.

معادله (٦-٦٣) و نیز حالت خاص آن (٦-٦۴) به عنوان **معادله برنولی** شناخته می‌شوند.

علاوه بر آن که معادله فوق، یک فرمول مفید در مسائل بدون اثر چسبندگی است، استخراج فرمول فوق نشان می‌دهد که جریانهای غیرچرخشی، از لحاظ دینامیکی فقط تحت شرایطی (که قبلاً بیان شد) امکان‌پذیر می‌باشند. و این بدان علت است که برای هر تابع Φ ، تا موقعی که $v_i=-\partial\Phi/\partial x_i$، می‌توان از معادلات دینامیک حرکت انتگرال‌گیری کرده، معادله برنولی به دست آورد که از آن، توزیع فشار حاصله و متناظراً معادلات حرکت ارضا می‌شوند.

مثال ٦-١۵

رابطه $\Phi=x^3-3xy^2$ داده شده‌است

(الف) نشان دهید که Φ معادله لاپلاس را ارضا می‌کند.

(ب) میدان سرعت غیرچرخشی را بیابید.

(پ) توزیع فشار را برای یک سیال همگن تراکم‌ناپذیر پیدا کنید، اگر در $(0,0,0)$، $p=p_0$ و $\Omega=gz$.

(ت) اگر صفحه $y=0$ یک مرز جامد باشد، مؤلفه مماسی سرعت را روی صفحه به دست آورید.

حل : (الف) داریم:
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-6x,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0.$$

بنابراین:
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=6x-6x=0.$$

(ب) از $v_i=-(\partial\Phi/\partial x_i)$، داریم:
$$v_1=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-3x^2+3y^2,\quad v_2=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=6xy,\quad v_3=0.$$

(پ) از معادله برنولولی [معادله (٦-٦۴)]
$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+\Omega=C,$$

در $(0,\ 0,\ 0)$ داریم: $v_1=0$، $v_2=0$، $p=p_0$ و $\Omega=0$. بنابراین: $C=\frac{p_0}{\rho}$

و
$$p=p_0-\frac{\rho}{2}(v_1{}^2+v_2{}^2)-\rho gz$$

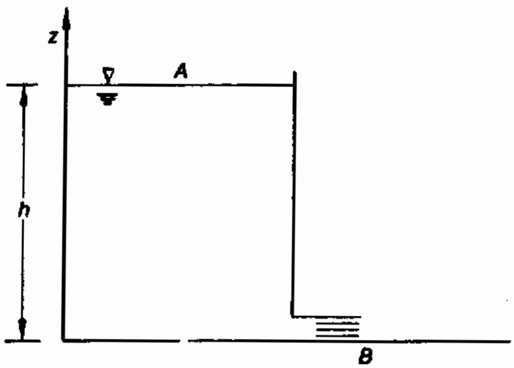
یا
$$p=p_0-\frac{\rho}{2}[9(y^2-x^2)^2+36x^2y^2]-\rho gz.$$

(ت) روی صفحه $y=0$، $v_1=-3x^2$ و $v_2=0$. حال $v_2=0$ بدان معناست که مؤلفه عمودی سرعت، روی صفحه صفر است (که این همان چیزی است که باید روی مرز جامد $y=0$ باشد). چون $v_1=-3x^2$،

مؤلفه‌های مماسی سرعت، روی صفحه صفر نیستند. یعنی سیال روی مرز می‌لغزد. در تئوری غیرچسبندگی ـ سازگار با فرض چسبندگی صفر ـ لغزش سیال، روی مرز جامد مجاز خواهدبود. بحث بیشتر پیرامون این نکته در بخش بعد ارائه می‌شود.

مثال ٦-١٦

مایعی از مجرای کوچکی (بدان گونه که نشان داده‌شده) خارج می‌شود. از چسبندگی صرف نظر کرده، فرض کنید کاهش ارتفاع سطح چنان آهسته است که می‌توان آن را پایدار در نظر گرفت. سرعت خروجی جت مایع را به صورت تابعی از h بیابید.



شکل ٦-١٣

حل: برای یک نقطه روی سطح آزاد نظیر نقطه A، $p=p_a$، $v\approx 0$ و $z=h$.

بنابراین، از معادله (٦-۶۴):

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz=\frac{p_a}{\rho}+gh.$$

در نقطه خروج جت، نظیر نقطه B، $z=0$ و $p=p_a$. بنابراین:

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p_a}{\rho}=\frac{p_a}{\rho}+gh,$$

که از آن:

$$v=\sqrt{2gh}.$$

که همان فرمول مشهور تریچلی است.

۶-۱۶- جریانهای غیرچرخشی به عنوان یک حل برای معادله ناویر ـ استوک

برای یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، معادلات ناویر ـ استوک در حکم معادلات حرکت می‌باشند:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}+B_i.$$

برای جریانهای غیرچرخشی:

$$v_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i},$$

به طوری که

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}=-\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_j}.$$

اما از معادله (۶-۵۵)، $\partial^2\Phi/\partial x_j\partial x_j=0$. بنابراین، مؤلفه‌های مربوط به چسبندگی، در معادله ناویر ـ استوک ـ در حالت جریان غیرچرخشی ـ حذف شده و معادلات، شکل معادله اولر برای یک سیال غیرچسبنده را خواهندگرفت. پس، چنان چه سیال چسبنده دارای چگالی همگن بوده، نیروهای حجمی کانسرواتیو [۳۱] (پایستار) باشند (یعنی $B_i=-\partial\Omega/\partial x_i$)، نتایج بخشهای قبل نشان می‌دهد که از نظر دینامیکی، جریانهای غیرچرخشی نیز برای یک سیال چسبنده امکان‌پذیر است. به هر حال، در هر مساله فیزیکی، همواره مرزهای جامد یا صلب وجود دارند. یک سیال چسبنده، به مرز می‌چسبد به طوری که هر دو مؤلفه ـ مماسی و عمودی ـ سرعت سیال در مرز، نظیر مؤلفه‌های سرعت خود مرز است. این بدان معناست که هر دو مؤلفه سرعت در مرز، باید از قبل مشخص شده‌باشد. به عنوان مثال، اگر $y=0$، یک مرز صلب در حال سکون باشد، آن‌گاه روی مرز، مؤلفه‌های مماسی $v_x=v_z=0$، و نیز مؤلفه عمودی $v_y=0$. برای جریان غیرچرخشی، شرایطی که باید برای Φ روی مرز محقق شود عبارت‌اند از ثابت $=\Phi$ در $y=0$ (به طوری که $\partial\Phi/\partial x=\partial\Phi/\partial z=0$) و $\partial\Phi/\partial y=0$، در $y=0$. اما این معلوم است (مثال ۶-۱۰ را ببینید، یا از تئوری پتانسیل) که در حالت کلی، حلی بر معادلات لاپلاس (که در هر شرط ثابت $=\Phi$ و $\nabla\Phi.\mathbf{n}=\partial\Phi/\partial n=0$ را روی تمام مرزها آرضا کند) وجود ندارد. بنابراین، به استثنای حالتی که حرکت مرزها، سازگار با نیاز به غیرچرخشی‌بودن (مثال ۶-۱۷ را ببینید) باشد، چرخش روی مرزها ایجادشده، و به داخل میدان جریان (مطابق با معادلات چرخش که در بخش بعد استخراج می‌شوند) نفوذ

31- Conservative

خواهدنمود. به هر حال، در مسائل خاص تحت شرایط مناسب، چرخش ایجادشده توسط مرزهای صلب، به یک لایه نازک از سیال مجاور مرز محدود می‌شود، به طوری که خارج از این لایه، جریانهای ناشی از یک حالت غیرچرخشی، غیرچرخشی خواهندبود. پیرامون این موضوع، در بخشهای بعد بیشتر سخن خواهیم‌گفت.

مثال ٦-١٧

برای جریان کوئت بین دو استوانه بی‌نهایت بلند و هم‌محور، نسبت سرعتهای زاویه‌ای دو استوانه باید چگونه باشد تا سیال چسبنده دارای جریان غیرچرخشی شود.

حل: از مثال ٦-١٣ از بخش ٦-١٣، تنها مؤلفه غیرصفر چرخش، در جریان کوئت عبارت است از:

$$\zeta_z = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

اگر $\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2 = 0$، جریان غیرچرخشی است. بنابراین:

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

باید توجه کرد گرچه در حالت جریان غیرچرخشی جملات مربوط به‌چسبندگی، از معادلات ناویر ـ استوک حذف می‌شوند، اما این بدان معنی نیست که در یک جریان غیرچرخشی یک سیال چسبنده، اتلاف چسبندگی وجود ندارد. در حقیقت، تا زمانی که یک مؤلفه غیرصفر نرخ تغییر شکل وجود دارد، اتلاف چسبندگی [که توسط معادله (٦ ـ ٢٨) ارائه می‌شود] وجود دارد و نرخ کار انجام‌شده برای حفظ جریان غیرچرخشی، اتلاف ناشی از چسبندگی را دقیقاً جبران می‌کند.

٦-١٧ - معادله‌انتقال چرخش، برای جریان چسبنده تراکم‌ناپذیر با چگالی ثابت

در این بخش، معادله‌حاکم بر بردار چرخش برای یک سیال چسبنده همگن تراکم‌ناپذیر را استخراج می‌کنیم. نخست فرض می‌کنیم که نیروی حجمی، از یک پتانسیل قابل استخراج است، یعنی $B_i=-\partial\Omega/\partial x_i$ حال با ثابت $\rho=$ و $B_i=-\partial\Omega/\partial x_i$، معادله ناویر ـ استوک را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \qquad (٦-٦٥)$$

که معمولاً $\nu=\mu/\rho$ چسبندگی سینماتیک نامیده می‌شود. اگر توسط اپراتور دیفرانسیل $\in_{mni}(\partial/\partial x_n)$ روی معادله (٦ ـ ٦٥) عمل شود [یعنی کرل curl هر دو طرف معادله (٦ ـ ٦٥) را بگیریم]، داریم:

۳۲(۶۶-۶)
$$\epsilon_{mni}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{mni}\frac{\partial v_i}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial \zeta_m}{\partial t},$$

$$\epsilon_{mni}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_{mni}\frac{\partial v_i}{\partial x_n}\right)$$
$$=\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_j\frac{\partial \zeta_m}{\partial x_j},$$

$$\epsilon_{mni}\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)=0\qquad\left[\text{i.e., curl grad}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)=0\right],$$

و

$$\epsilon_{mni}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\left(\epsilon_{mni}\frac{\partial v_i}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial^2\zeta_m}{\partial x_j\partial x_j}.$$

بنابراین، معادله ناویر ـ استوک شکل زیر را خواهد یافت:

$$\frac{\partial\zeta_m}{\partial t}+v_j\frac{\partial\zeta_m}{\partial x_j}+\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\nu\frac{\partial^2\zeta_m}{\partial x_j\partial x_j}. \qquad (۶۷-۶)$$

شکل مفیدتر را به شیوه زیر می‌توان به دست آورد. از معادله (۶ ـ ۵۲) داریم:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\epsilon_{pji}\zeta_p.$$

بنابراین:

$$\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\epsilon_{mni}\epsilon_{pji}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\zeta_p.$$

اما

۳۳(۶۸-۶)
$$\epsilon_{mni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=0$$

و

۳۴(۶۹-۶)
$$\epsilon_{mni}\epsilon_{pji}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\zeta_p=(\delta_{mp}\delta_{nj}-\delta_{mj}\delta_{np})\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\zeta_p$$
$$=\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\zeta_m-\frac{\partial v_m}{\partial x_n}\zeta_n=-\frac{\partial v_m}{\partial x_n}\zeta_n.$$

---

۳۲. به عنوان مثال: $\epsilon_{1ni}\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)=\epsilon_{123}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)+\epsilon_{132}\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2}\left(\frac{p}{\rho}+\Omega\right)=0$

۳۳. $\epsilon_{1ni}\frac{\partial v_j}{\partial x_n}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=\epsilon_{123}\frac{\partial v_j}{\partial x_2}\frac{\partial v_j}{\partial x_3}+\epsilon_{132}\frac{\partial v_j}{\partial x_3}\frac{\partial v_j}{\partial x_2}=0$ و غیره

۳۴. توجه کنید که برای یک سیال تراکم‌ناپذیر: $\partial v_n/\partial x_n=0$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial t} + v_j \frac{\partial \zeta_m}{\partial x_j} = \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \zeta_n + \nu \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x_j \partial x_j} \tag{۶-۷۰}$$

یا

$$\frac{D\zeta_m}{Dt} = \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \zeta_n + \nu \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{۶-۷۱الف}$$

که می‌توان آن را به شکل پایای زیر نوشت:

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = (\nabla \mathbf{v})\boldsymbol{\zeta} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}, \tag{۶-۷۱ب}$$

که

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}.$$

مثال ۶-۱۸

از معادله (۶-۷۱)، معادله انتقال چرخش را برای جریانهای دوبعدی به دست آورید.

حل: فرض کنید میدان سرعت به صورت زیر باشد

$$v_1 = v_1(x_1, x_2, t), \quad v_2 = v_2(x_1, x_2, t), \quad v_3 = 0.$$

پس:

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3$$

می‌شود:

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 \equiv \zeta \mathbf{e}_3.$$

یعنی، همان گونه که انتظار می‌رفت، بردار سرعت زاویه‌ای ($=\zeta/2$) عمود بر صفحه جریان است. حال

$$[(\nabla \mathbf{v})\boldsymbol{\zeta}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله (۶-۷۱) به‌معادله‌عددی زیر تقلیل می‌یابد

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta, \tag{۶-۷۲}$$

که:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

و:
$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}.$$

مثال ۶-۱۹

میدان سرعت برای جریان پوسوله مسطح توسط روابط زیر داده شده‌است:

$$v_1 = C\left(\frac{h^2}{4}-x_2{}^2\right), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

(الف) مؤلفه‌های چرخش را بیابید.

(ب) اثبات‌کنید که معادله (۶-۷۲) ارضا می‌شود.

حل: (الف) تنها مؤلفه غیرصفر چرخش عبارت است از:

$$\zeta_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 2Cx_2 \equiv \zeta.$$

(ب) داریم:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}+v_1\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = 0$$

و

$$\nabla^2\zeta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}\right)(2Cx_2) = 0,$$

به‌طوری که معادله (۶-۷۲) ارضا می‌شود.

۶-۱۸- مفهوم لایه مرزی

در این بخش با یک قیاس، از لحاظ کیفی، مفهوم لایه‌مرزی چسبنده را توصیف خواهیم‌نمود. در مثال ۶-۱۸، معادله چرخش را به شکل زیر -برای جریان دوبعدی از یک سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر- استخراج نمودیم:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu\nabla^2\zeta,$$

که درآن، ζ تنها مؤلفه غیرصفر چرخش برای جریان دوبعدی و ν چسبندگی سینماتیک ($=\mu/\rho$) است.

در بخش ۶-۱۲، دیدیم که اگر از حرارت ایجادشده در اثر اتلاف ناشی از چسبندگی صرف نظر شود، معادله حاکم بر توزیع درجه حرارت در میدان جریان، در اثر هدایت حرارتی از طریق مرزهای یک جسم داغ، به صورت زیر است:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \alpha\nabla^2\theta, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad (۶-۴۵)$$

که در آن θ درجه حرارت و α ضریب پخش حرارتی[۳۵]، با ضریب هدایت k، چگالی ρ و حرارت مخصوص بر واحد جرم c ـ با فرمول $\alpha=k/\rho c$ ـ ارتباط می‌یابند.

حال فرض کنید مساله ما، یک جریان یکنواخت در حال گذر روی یک جسم داغ است که درجه حرارت آن، در حالت کلی، در امتداد مرز تغییر می‌کند. فرض کنید که درجه حرارت، در فاصله دوری از جسم θ_∞ باشد، آن‌گاه با تعریف $\theta'=\theta-\theta_\infty$

$$\frac{D\theta'}{Dt}=\alpha\nabla^2\theta',$$

با $\theta'=0$ در $x^2+y^2\to\infty$ از سوی دیگر، توزیع چرخش، حول جسم، با معادله زیر صورت می‌گیرد:

$$\frac{D\zeta}{Dt}=\nu\nabla^2\zeta,$$

$$\zeta=0 \quad \text{در} \quad x^2+y^2\to\infty$$

که در آن، تغییر ξ، ناشی از چرخش ایجادشده روی مرز صلب است و توزیع آن در داخل میدان، به تغییر درجه حرارت ناشی از پخش حرارتی از جسم داغ به داخل میدان بسیار شبیه می‌باشد.

حال، به وضوح شاهدیم که در حالت توزیع درجه حرارت، تأثیر درجه حرارت جسم داغ در میدان، به سرعت جریان[۳۶] وابسته است. در سرعت بسیار کم، هدایت، بر انتقال[۳۷] (یا همرفت) حرارت غلبه دارد (مطابق منحنی C_1 در شکل ۶ـ۱۴). حال آن که در سرعت بالا، حرارت ـ توسط سیال ـ چنان سریع منتقل می‌شود که ناحیه متأثر از جسم داغ، به یک لایه نازک ـ در مجاور جسم ـ و نیز یک دنباله ـ از سیال حرارت یافته در عقب آن ـ محدود می‌شود (مطابق منحنی C_2 در شکل ۶ـ۱۴).

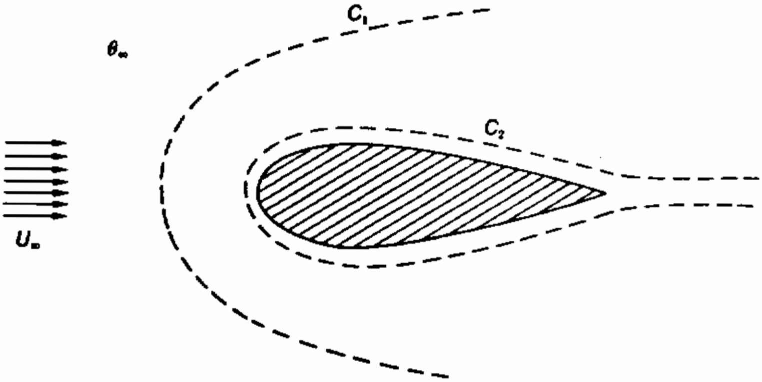
به طور مشابه، اثر چسبندگی (که عامل تولید چرخش روی مرز است) به سرعت جریان بالاسری[۳۸] بستگی دارد. در سرعت کم، تأثیر چسبندگی، در عمق میدان و در تمامی جهات نفوذ می‌کند به طوری که لزوماً تمامی میدان جریان، دارای چرخش می‌شود. از سوی دیگر، در سرعت بالا، اثر چسبندگی به یک لایه نازک (که به عنوان لایه‌مرزی شناخته می‌شود) در نزدیک جسم و انتهای آن، محدود می‌شود.

35- Thermal diffusivity

36- Stream

37- Convection

38- Upstream



شکل ٦-١۴

این مفهوم، فرد را قادر می‌سازد که مساله جریان سیال را با تقسیم ناحیه جریان ـ به یک ناحیه جریان غیرچرخشی بیرونی و یک لایه مرزی چسبنده ـ حل نماید و ثابت شده که این اقدام بسیار مفید است، چرا که از پیچیدگی مسائل ریاضی ـ شامل تمامی معادلات ناویر ـ استوک ـ به نحو قابل ملاحظه‌ای می‌کاهد. به شیوه‌های حل و چگونگی مرتبط ساختن نواحی مختلف وارد نخواهیم‌شد، چون آنها متعلق به تئوری لایه مرزی می‌باشند.

٦-١٩- سیال نیوتنی تراکم‌پذیر

برای سازگاربودن یک سیال تراکم‌پذیر (با حالت تنش متناظر با حالت سکون) و نیز سازگاربودن با این تعریف که p به طور صریح وابسته به کمیات سینماتیکی (هنگامی که در حرکت است) نیست، ما p را دارای همان مقدار فشار تعادل ترمودینامیکی در نظر می‌گیریم. بنابراین برای چگالی ρ و دمای θ، از معادله تعادل حالت به دست می‌آید:

$$p = p(\rho, \theta), \qquad (٦-٧٣)$$

(یعنی، برای گاز ایده آل $p=R\rho\theta$). بنابراین:

$$T_{ij} = -p(\rho, \theta)\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}. \qquad (٦-٧۴)$$

چون

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p + (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)\,\Delta, \qquad (٦-٧۵)$$

واضح است که در این حالت، "فشار p" به معنای میانگین تنش فشاری عمودی نیست. فشار وقتی معنی دارد که

$$k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu = 0, \qquad (۷۶-۶)$$

که برای گازهای تک‌اتمی[۳۹] صادق است.

نوشتن معادله بنیادین برحسب μ و $K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$ می‌دهد

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} - \tfrac{2}{3}\mu\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + k\Delta\delta_{ij}. \qquad (۷۷-۶)$$

با T_{ij} داده‌شده توسط معادلات فوق، معادلات حرکت چنین می‌شود (μ و k را ثابت فرض کنید)

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \rho B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j} + k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right). \qquad (۷۸-۶)$$

معادلات (۶-۷۸) و (۶-۷۳) چهار معادله (برای یافتن شش مجهول v_1، v_2، v_3، p، ρ و θ) را به‌دست می‌دهند. معادله پنجم، توسط معادله پیوستگی ارائه می‌شود:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \qquad (۷۹-۶)$$

و معادله ششم توسط معادله انرژی:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_j}. \qquad (۸۰-۶)$$

برای یک سیال داده‌شده، فرض کنید که وابستگی انرژی داخلی u به ρ و θ نظیر هنگامی باشد که سیال در تعادل است، به عنوان مثال، برای گاز ایده‌آل

$$u = c_v\theta, \qquad (۸۱-۶)$$

که c_v حرارت مخصوص در حجم ثابت است.

به طور کلی، داریم:

$$u = u(\rho, \theta). \qquad (۸۲-۶)$$

معادلات (۶-۷۳)، (۶-۷۸)، (۶-۷۹)، (۶-۸۰) و (۶-۸۲) یک دستگاه هفت معادله ـ هفت مجهول v_1، v_2، v_3، p، ρ، θ و u را تشکیل می‌دهند.

39- Monoatomic

٦-۲۰- معادله انرژی برحسب آنتالپی

آنتالپی [40] بر واحد جرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h = u + \frac{p}{\rho}, \tag{۸۳-٦}$$

که u انرژی داخلی بر واحد جرم، p فشار، و ρ چگالی می‌باشد.

فرض کنید که $h^0 \equiv h + (v^2/2)$ (به عنوان آنتالپی ایستایی [41] شناخته می‌شود) نشان خواهیم داد که معادله انرژی برحسب h^0 - صرف نظر از نیروی حجمی - میشود:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(T'_{ij} v_i - q_j), \tag{۸۴-٦}$$

که T'_{ij} تانسور تنش چسبندگی و q_i بردار سیلان حرارتی است. نخست با تعریف

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) = \frac{Du}{Dt} + \frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{v}\cdot\frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

از معادله انرژی [معادله (٦ - ۴۲)]، داریم:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = (-p\delta_{ij} + T'_{ij})\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$$

یعنی:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + T'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$$

همچنین، داریم:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

و معادله حرکت (در غیاب نیروی حجمی) برابر است با:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j}.$$

بنابراین:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + T'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} - v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j}v_i.$$

40- Enthalpy

41- Stagnation enthalpy

توجه کنید که:

$$\frac{Dp}{Dt}-v_i\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial p}{\partial t}$$

و

$$-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}-\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=-\frac{p}{\rho}\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)=0,$$

داریم:

$$\rho\frac{Dh_0}{Dt}=T'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j}v_i-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

یا

$$\rho\frac{Dh_0}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}(T'_{ij}v_i)-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial t}.$$

مثال ٦-٢٠

نشان دهید که برای جریان پایدار از یک سیال غیرچسبنده و عایق هدایت حرارتی، اگر جریان از یک حالت همگن سرچشمه بگیرد، آن گاه (الف) ثابت $=h+(v^2/2)$، و (ب) اگر سیال یک گاز ایده‌آل باشد، آن گاه

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{constant},$$

که $\gamma=C_p/C_v$ نسبت حرارت مخصوص ـ تحت فشار ثابت و حجم ثابت ـ می‌باشد.

حل: (الف) چون جریان پایدار است، $\partial p/\partial t=0$. همچنین سیال، غیرچسبنده بوده، هادی هیچ حرارتی نیست، پس $T'_{ig}=0$ و $q_i=0$. بنابراین معادله انرژی (٦-٨۴) تبدیل می‌شود به $\frac{Dh_0}{Dt}=0$

به عبارت دیگر، h_0 برای هر ذره ثابت است. اما چون جریان از یک حالت همگن نشأت می‌گیرد، در تمام میدان جریان داریم:

$$h_0=h+\frac{v^2}{2}=\frac{p}{\rho}+u+\frac{v^2}{2}=\text{constant} \tag{٦-٨۵}$$

(ب) برای یک گاز ایده‌آل $p=\rho R\theta$، $u=c_v\theta$ و $R=c_p-c_v$، بنابراین: $u=\frac{p}{\rho}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)$

که

$$\gamma=\frac{c_p}{c_v} \tag{٦-٨٦}$$

و

$$h_0=\frac{p}{\rho}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)+\frac{v^2}{2}=\text{ثابت} \tag{٦-٨٧}$$

۶-۲۱- موج آکوستیک

انتشار صوت را می‌توان با انتشار اغتشاشات بی‌نهایت کوچک در یک سیال غیرچسبنده تراکم‌پذیر، تقریب زد. برای یک سیال غیرچسبنده ـ صرف نظر از نیروهای حجمی ـ معادلات حرکت عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}. \qquad \text{(الف)}$$

فرض کنید که سیال، ابتدا در سکون باشد با شرط

$$v_i=0,\quad \rho=\rho_0,\quad p=p_0. \qquad \text{(ب)}$$

حال فرض کنید که سیال، از سکون دچار اغتشاشی شود، به طوری که:

$$v_i=v_i'(\mathbf{x},t),\quad \rho=\rho_0+\rho'(\mathbf{x},t),\quad p=p_0+p'(\mathbf{x},t). \qquad \text{(پ)}$$

با قراردادن در معادله (الف)

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t}+v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0(1+\rho'/\rho_0)}\frac{\partial p'}{\partial x_i}. \qquad \text{(ت)}$$

چون ما اغتشاشات را بی‌نهایت کوچک فرض کردیم، جملات $v'_j\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}\right)$ و $\frac{\rho'}{\rho_0}$ صرف نظرکردنی است و معادلات حرکت خطی خواهندشد:

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}. \qquad (۶-۸۸)$$

به طرز مشابه، با لحاظ معادلهٔ بقای جرم

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+v_i'\frac{\partial \rho'}{\partial x_i}+\rho_0(1+\rho'/\rho_0)\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}=0$$

معادله خطی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \qquad (۶-۸۹)$$

با مشتق‌گیری معادله (۶ـ۸۸) نسبت به x_i و معادله (۶ـ۸۹) نسبت به t، سرعت را حذف می‌کنیم

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}. \qquad (۶-۹۰)$$

علاوه بر این، فرض می‌کنیم که جریان باروتروپیک[42] باشد، یعنی فشار به طور صریح تنها وابسته به چگالی باشد، به طوری که $p=p(\rho)$. با بسط سری تیلور $p(\rho)$ حول مقدار سکون فشار p_0، داریم:

$$p=p_0+\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0}(\rho-\rho_0)+\dots \qquad (۶-۹۱)$$

42- Barotropic

با صرف نظر از جملات مرتبه بالاتر:

$$p' = c_0^2 \rho', \tag{۹۲-۶}$$

که

$$c_0^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0}. \tag{۹۳-۶}$$

بنابراین، برای یک سیال باروتروپیک

$$c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \tag{۹۴-۶}$$

و

$$c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \tag{۹۵-۶}$$

این معادلات، دقیقاً مشابه (برای امواج یک‌بعدی) معادلات امواج الاستیک در فصل ۵ می‌باشند، بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اغتشاشات فشار و چگالی، با سرعت $c_0=\sqrt{(\frac{dp}{d\rho})_{\rho 0}}$ منتشر می‌شوند. ما c_0 را **سرعت صوت**[۴۳] در حالت ایستایی[۴۴] می‌نامیم. برای یک سیال در حرکت عمومی، سرعت موضعی صوت، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \tag{۹۶-۶}$$

هنگامی که رابطه **ایزونتروپیک**[۴۵] p و ρ مورد استفاده قرار گیرد، یعنی

$$p = \beta \rho^\gamma, \tag{۹۷-۶}$$

که $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$ (نسبت حرارتهای مخصوص) و β یک ثابت است:

$$\frac{dp}{d\rho} = \beta\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

به طوری که سرعت صوت خواهدشد:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \tag{۹۸-۶}$$

43- Speed of sound

44- Stagnation

45- Isentropic

مثال ۶-۲۱

(الف) عبارتی را برای یک موج منتشره آکوستیک مسطح در جهت e_1 بیابید.

(ب) اغتشاش سرعت را پیدا کنید.

(پ) $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ را با حالتی که از $v_j(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ صرف نظر شده، مقایسه نمایید.

حل: (الف) با مراجعه به بخش امواج الاستیک، به‌سادگی می‌توان نوشت:

$$p = \epsilon \sin \frac{2\pi}{l} (x_1 - c_0 t).$$

توجه کنید که پریمها را حذف کردیم.

(ب) با استفاده‌از معادله (۶-۸۸) داریم:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\epsilon}{\rho_0}\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)(x_1 - c_0 t).$$

بنابراین، سرعت:

$$v_1 = \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0}\sin\left(\frac{2\pi}{l}\right)(x_1 - c_0 t)$$

دقیقاً نظیر شکل موج فشار است.

(پ) برای حالت یک‌بعدی، طالب محاسبه عبارت زیر هستیم:

$$\left|\frac{v_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}}{\partial v_1/\partial t}\right| = \frac{|v_1|\ (2\pi\epsilon/\rho_0 l c_0)}{\dfrac{\epsilon}{\rho_0}\left(\dfrac{2\pi}{l}\right)} = \frac{|v_1|}{c_0}.$$

بنابراین، بهترین تقریب، هنگامی است که اغتشاش دارای سرعتی به مراتب کوچکتر از سرعت صوت باشد.

مثال ۶-۲۲

دو سیال، دارای یک سطح مرزی مشترک در $x_1=0$ می‌باشند. یک موج آکوستیک مسطح را که روی سطح مشترک به صورت عمودی می‌تابد در نظر گرفته، دامنه‌های امواج منعکس شده و منتقله را به دست آورید.

حل: گیرید خواص سیال در طرف چپ مرز $(x_1<0)$ را با ρ_1 و c_1 و برای سیال طرف راست $(x_1>0)$ با ρ_2 ، c_2 نمایش دهیم.

حال، فرض کنید موج فشار تابیده[۴۶]، به طرف راست منتشر، با رابطه زیر شود

$$p_I = \epsilon_I \sin \frac{2\pi}{l_I}(x_1 - c_1 t) \qquad (x_1 \leq 0).$$

این موج فشار، منجر به یک موج انعکاس

$$p_R = \epsilon_R \sin \frac{2\pi}{l_R}(x_1 + c_1 t) \qquad (x_1 \leq 0)$$

و یک موج انتقال

$$p_T = \epsilon_T \sin \frac{2\pi}{l_T}(x_1 - c_2 t) \qquad (x_1 \geq 0).$$

می‌شود. حال شرایط روی مرز $x_1=0$ را در نظر می‌گیریم. نخست این که فشار کل تعریف شده، باید همسان باشند، به طوری که:

$$(p_I + p_R)_{x_1=0} = (p_T)_{x_1=0}$$

یا:

$$\epsilon_I \sin \frac{2\pi c_1 t}{l_I} - \epsilon_R \sin \frac{2\pi c_1 t}{l_R} = \epsilon_T \sin \frac{2\pi c_2 t}{l_T}$$

این معادله، برای تمامی زمانها ارضا می‌شود اگر:

(الف)
$$l_I = l_R = \frac{c_1}{c_2} l_T$$

و

(ب)
$$\epsilon_I - \epsilon_R = \epsilon_T$$

علاوه بر این، سرعتهای عمودی روی $x_1=0$ در همه زمانها باید پیوسته باشد، به طوری که $\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)_{x_1=0}$ نیز پیوسته‌باشد. بنابراین با استفاده از معادله (۶ ـ ۸۷)

$$-\left.\frac{\partial v_1}{\partial t}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial p_I}{\partial x_1} + \frac{\partial p_R}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial p_T}{\partial x_1}\right)_{x_1=0}$$

با جایگزینی برای فشار به دست می‌آید:

(پ)
$$\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\epsilon_I}{l_I} + \frac{\epsilon_R}{l_R}\right) = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\epsilon_T}{l_T}\right).$$

با ترکیب معادلات (الف)، (ب) و (پ) داریم:

(ث)
$$\epsilon_T = \left(\frac{2}{1 + (\rho_1 c_1/\rho_2 c_2)}\right)\epsilon_I,$$

$$\epsilon_R = \left(\frac{(\rho_1 c_1/\rho_2 c_2) - 1}{(\rho_1 c_1/\rho_2 c_2) + 1}\right)\epsilon_I.$$

توجه کنید که برای حالت خاص: $p_1 c_1 = p_2 c_2$، $\epsilon_R = 0$ and $\epsilon_T = \epsilon_I$

46- Incident

۶-۲۲- جریان غیرچرخشی و باروتروپیک سیال تراکم‌پذیر چسبنده

فرض کنید که یک میدان جریان غیرچرخشی، با رابطه زیر داده‌شود

$$v_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \qquad (۶-۹۹)$$

برای تبعیت از اصل بقای جرم، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \qquad (۶-۱۰۰)$$

این معادله برحسب Φ می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0. \qquad (۶-۱۰۱)$$

معادلات حرکت برای یک سیال غیرچسبنده همان معادله اولر هستند:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i. \qquad (۶-۱۰۲)$$

فرض می‌کنیم که جریان باروتروپیک باشد، یعنی فشار تابع واضحی از چگالی باشد (نظیر جریان ایزونتروپیک یا ایزوترمال). بنابراین در یک جریان باروتروپیک

$$p = p(\rho) \quad \text{و} \quad \rho = \rho(p). \qquad (۶-۱۰۳)$$

حال

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int \frac{1}{\rho}dp\right) = \left[\frac{d}{dp}\int \frac{1}{\rho}dp\right]\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}. \qquad (۶-۱۰۴)$$

بنابراین، برای جریانهای باروتروپیک یک سیال غیرچسبنده، تحت نیروهای حجمی کانسرواتیو (پایستار) (یعنی $B_i = \frac{-\partial \Omega}{\partial x_1}$)، معادلات حرکت را می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int \frac{dp}{\rho} + \Omega\right). \qquad (۶-۱۰۵)$$

با مقایسه معادله (۶-۱۰۵) با معادله (۶-۶۰)،مجدداً و بلافاصله دیده می‌شود که تحت شرایط بیان‌شده، جریانهای غیرچرخشی از لحاظ دینامیکی، همواره ممکن می‌باشند. در حقیقت، انتگرال‌گیری معادله (۶-۱۰۵) (دقیقاً به همان صورت که در بخش ۶-۱۵ انجام شد) معادله برنولی زیر را می‌دهد:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Omega = f(t), \qquad (۶-۱۰۶)$$

که برای جریان پایدار خواهدشد:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Omega = \text{ثابت} \qquad (۶-۱۰۷)$$

برای اکثر مسائل دینامیک گازها، نیروی حجمی، در مقایسه با سایر نیروها کوچک بوده، اغلب صرف نظر می‌شود. پس داریم:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت} \tag{۶-۱۰۸}$$

مثال ۶-۲۳

برای جریانهای پایدار ایزونتروپیک از یک سیال تراکم‌پذیر غیرچسبنده، نشان دهید که:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت}$$

حل: برای جریان ایزونتروپیک:

$$p = \beta\rho^{\gamma}, \quad dp = \beta\gamma\rho^{\gamma-1}\, d\rho.$$

به طوری که:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \beta\gamma \int \rho^{\gamma-2}\, d\rho = \beta\gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}.$$

بنابراین، معادله برنولی [معادله (۶-۱۰۸)] می‌شود:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت}$$

توجه کنید که این، نظیر همان نتیجه‌ای است که در مثال ۶-۲۰، معادله (۶-۸۷)، با استفاده از معادله انرژی به دست آمد. به عبارت دیگر، تحت شرایط داده‌شده (غیرچسبندگی، بدون هدایت حرارتی، حالت همگن اولیه)، معادله برنولی و معادله انرژی یکسان می‌باشند.

مثال ۶-۲۴

فرض کنید p_0 فشار در سرعت صفر باشد (فشار ایستایی خوانده‌می‌شود). برای جریان پایدار ایزونتروپیک ($\frac{p}{\rho^g}=$ ثابت) یک گاز ایده‌آل، نشان دهید که

$$p_0 = p\left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{۶-۱۰۹}$$

که در آن، c سرعت موضعی صوت است.

حل: چون (مثال قبل را ببینید)

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \text{ثابت}$$

بنابراین:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho}\right).$$

حال $c^2=\gamma(P/\rho)$

$$\frac{v^2}{2c^2}=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)-\frac{1}{\gamma-1}.$$

چون:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{-1/\gamma},$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^2=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1.$$

پس:

$$\frac{p_0}{p}=\left[1+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

برای عدد ماخ کوچک ($M=\frac{v}{c}$)، می‌توانیم از بسط دوجمله‌ای[47] استفاده کنیم تا از معادله فوق به دست آوریم:

$$\frac{p_0}{p}=1+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{1}{8}\gamma\left(\frac{v}{c}\right)^4+\dots.$$

توجه کنید که:

$$\frac{p\gamma}{c^2}=\frac{p\gamma}{\gamma\left(\frac{p}{\rho}\right)}=\rho,$$

داریم:

$$p_0=p+\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{8}\rho v^2\left(\frac{v}{c}\right)^2+\dots$$

یا:

$$p_0=p+\frac{1}{2}\rho v^2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\dots\right].$$

برای عدد ماخ کوچک، معادله فوق می‌شود: $p_0=p+\frac{1}{2}\rho v^2,$

که نظیر معادله مربوط به یک سیال تراکم‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، برای جریان پایدار و ایزونتروپیک، اگر عدد ماخ کوچک باشد (مثلاً ۰/۳ >) سیال را می‌توان تراکم‌ناپذیر گرفت.

مثال ۶-۲۵

برای یک جریان غیرچرخشی، باروتروپیک و پایدار، معادله‌ای برای پتانسیل سرعت استخراج کنید. از نیروی حجمی صرف نظر کنید.

47- Binomial

حل: برای جریان پایدار، با $v_i = \frac{-\partial \Phi}{\partial x_i}$، معادله پیوستگی عبارت است از:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \qquad \text{(الف)}$$

و معادله حرکت عبارت‌است از:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \qquad \text{(ب)}$$

فرض کنید $c^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}$ (سرعت موضعی صوت)، پس:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}\right). \qquad \text{(پ)}$$

با قراردادن معادله (پ) در معادله (الف)، به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \qquad \text{(ت)}$$

یا

$$\left(c^2 \delta_{ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \qquad \text{(ث)}$$

معادله (ث) در شکل طولانی خود خواهد شد:

$$\left[c^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}$$
$$-2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3 \partial x_1}\right) = 0.$$

۶-۲۳- جریان تک‌بعدی از یک سیال تراکم‌پذیر

در این بخش، برخی از مسائل جریان داخلی از یک سیال تراکم‌ناپذیر را مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض کنید که سیال، یک گاز ایده‌آل باشد. جریان، یک‌بعدی در نظر گرفته خواهدشد، چرا که فشار، درجه حرارت، چگالی، سرعت، وغیره، در امتداد هر سطح مقطعی از کانال (یا مجرایی که سیال از آن می‌گذرد) یکنواخت است. همچنین فرض کنید که جریان، پایدار و آدیاباتیک[۴۸] (بی‌دررو) باشد.

در جریان پایدار، نرخ سیلان جرم، برای تمامی سطوح مقاطع ثابت است. اگر A مساحت متغیر سطح مقطع، ρ چگالی و v سرعت باشد، داریم:

$$\rho A v = C \quad \text{(یک ثابت)} \qquad (۶-۱۱۰)$$

48- Adiabatic

برای مشاهده اثر تغییر مساحت روی جریان، ما مشتق کامل معادله (۶ - ۱۱۰) را می‌گیریم، یعنی:

$$d\rho\ (Av) + \rho\ (dA)v + \rho A\ (dv) = 0.$$

با تقسیم معادله فوق بر ρAv، به دست می‌آید:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0. \tag{۶-۱۱۱}$$

بنابراین:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v}. \tag{الف}$$

حال، معادله انرژی، برای جریان باروتروپیک از یک گاز ایده‌آل عبارت است از [معادله (۶ - ۱۰۸) را ببینید]:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{ثابت}$$

بنابراین، با دیفرانسیل‌گیری معادله بالا خواهیم‌داشت:

$$vdv + \frac{dp}{\rho} = vdv + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho = 0.$$

اما $c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)}$ (سرعت صوت)، پس:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{vdv}{c^2}. \tag{ب}$$

با ترکیب معادلات (الف) و (ب) به دست می‌آوریم:

$$\frac{dA}{A} = \frac{vdv}{c^2} - \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right).$$

نسبت سرعت جریان، به سرعت موضعی صوت، به عنوان **عدد ماخ**[49] شناخته می‌شود. با نمایش عدد ماخ توسط M، معادله فوق را می‌توان چنین نوشت (گاه به عنوان **معادله هوگن**[50] شناخته می‌شود):

$$\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v}(M^2 - 1). \tag{۶-۱۱۲}$$

از معادله فوق، دیده می‌شود که برای جریان مادون صوت[51] ($M < 1$) (نظیر حالت یک سیال

49- Mach number

50- Hugoniot equation

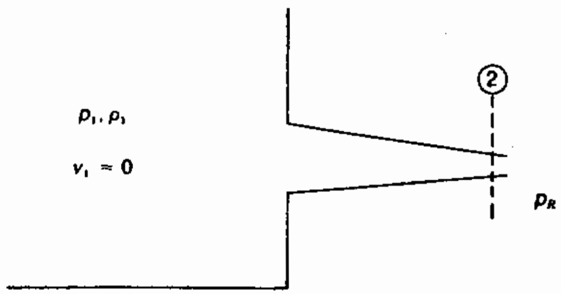
51- Subsonic

تراکم‌پذیر) یک‌ا فزایش در مساحت، منجر به کاهش در سرعت می‌شود. از سوی دیگر، برای جریان مافوق صوت[۵۲] (۱ < M)، افزایش در مساحت، یک افزایش در سرعت را به دنبال خواهدداشت. علاوه بر این، سرعت بحرانی (۱ = M) تنها در کوچکترین مساحت سطح مقطع که در آن $dA=0$، حاصل می‌شود.

اینک جریان در یک نازل همگرا[۵۳] و جریان در یک نازل همگرا ـ واگرا را با استفاده از فرضیات یک‌بعدی، مورد مطالعه قرار خواهیم‌داد.

(الف) جریان در یک نازل همگرا

جریان آدیاباتیک یک گاز ایده‌آل رااز یک تانک بزرگ (که در داخل آن فشار p_1 و چگالی ρ_1 لزوماً بدون تغییر باقی می‌ماند) به ناحیه‌ای با فشار p_R در نظر بگیرید.



شکل ٦-۱۵

با به کارگیری معادله انرژی و استفاده از شرایط داخل تانک در مقطع (۲)، داریم:

$$\frac{v_2^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}=0+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1},$$

که p_2، ρ_2، و v_2، فشار، چگالی و سرعت در مقطع (۲) می‌باشند. بنابراین:

$$v_2^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}\right).$$

52- Supersonic

53- Converging nozzle

برای جریان آدیاباتیک:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

بنابراین:

$$v_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1\right]. \quad (۱۱۳-٦)$$

با محاسبه نرخ جریان جرم، داریم:

$$\text{نرخ جریان جرم} \equiv \frac{dm}{dt} = A_2\rho_2 v_2 = A_2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\rho_1 v_2.$$

پس:

$$\frac{dm}{dt} = A_2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\rho_1\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

یا

$$\frac{dm}{dt} = A_2\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_1\rho_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}. \quad (۱۱۴-٦)$$

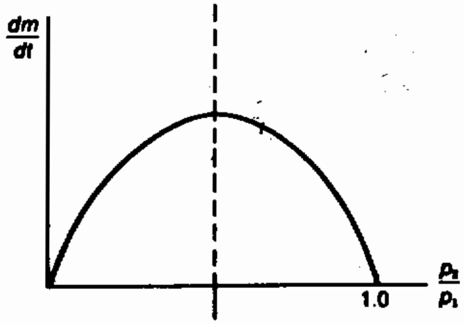
برای p_1، ρ_1، و A_1 داده‌شده، می‌بینیم که $\frac{dm}{dt}$ تنها وابسته به p_2 می‌باشد. هنگامی که $p_2=0$، $\frac{dm}{dt}$ برابر صفر است و وقتی $p_2=p_1$، $\frac{dm}{dt}$ نیز صفر می‌شود.

شکل ٦-١٦ منحنی $\frac{dm}{dt}$ در برابر $\frac{p_2}{p_1}$ را طبق معادله (٦-١١۴) نشان می‌دهد. به سادگی می‌توان دریافت که $\left(\frac{dm}{dt}\right)_{max}$ وقتی اتفاق می‌افتد که

$$p_2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} p_1 \quad (۱۱۵-٦)$$

و در این فشار p_2،

$$v_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}\left(\frac{\gamma+1}{2}-1\right) = \gamma\frac{p_2}{\rho_2} = \text{سرعت صوت در مقطع (۲)}$$



شکل ٦-١٦

فشار p_2 [داده‌شده توسط معادله (٦-۱۱۵)] به عنوان فشار بحرانی p_c شناخته می‌شود. این فشار، در مقطع (۲) هرگز نمی‌تواند کوچکتر از p_c (که تنها وابسته به p_1 است) باشد، چراکه در غیر این صورت جریان در مقطع (۲) مافوق صوت[54] می‌شود و این از نظر نتیجه حاصلهٔ قبلی غیرممکن است، چون با ۱ = M، dA باید صفر باشد، و با ۱ < M، در حال افزایش (نازل واگرا). بنابراین، برای حالت یک نازل همگرا، p_2 هرگز نمی‌تواند کمتر از p_R ـ فشار محیط در جت خروجی ـ باشد.

هنگامی که $p_R \geq p_c$، $p_2 = p_R$، و $p_R < p_c$ آن گاه $p_2 = p_c$. به عبارت دیگر، رابطه بین $\frac{dm}{dt}$ و $\frac{p_R}{p_1}$ به صورت زیر داده می‌شود:

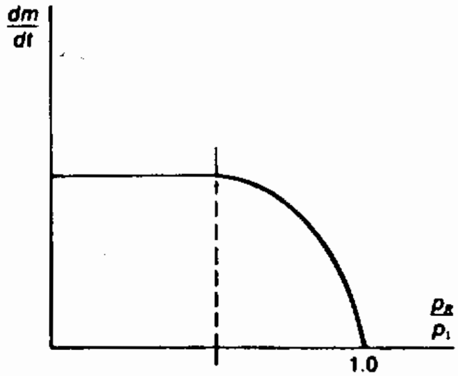
$$\frac{dm}{dt} = A_2\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_1\rho_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2} \qquad \text{برای } p_R \geqq p_c$$

(٦-۱۱٦ الف)

$$\frac{dm}{dt} = A_2\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_1\rho_1\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{2/(\gamma-1)} - \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\right]\right\}^{1/2} = \text{یک ثابت} \qquad \text{برای } p_R \leqq p_c$$

(٦-۱۱٦ ب)

شکل ٦-۱۷ این رابطه را نشان می‌دهد:

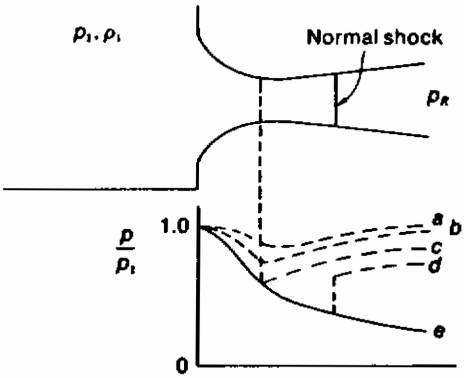


شکل ٦-۱۷

۵۴. توجه کنید که: $v_2^2 \cdot 1 < \gamma$ تابعی از بوده و به‌طور منظم و یکنواخت Monotonically در حال کاهش است.

(ب) جریان در یک نازل همگرا ـ واگرا

برای این که سرعت یک سیال تراکم‌پذیر (که از یک تانک تغذیه بزرگ خارج می‌شود) افزایش یابد، یک نازل همگرا لازم است. از قسمت (الف) دیدیم که حداکثر عدد ماخ قابل حصول، در یک گذرگاه همگرا، واحد می‌باشد. همچنین، در آغاز این بخش، نتیجه گرفتیم که برای کسب عدد ماخ بزرگتر از واحد، مساحت سطح مقطع باید در جهت جریان افزایش یابد، پس، برای این که جریان مافوق صوت از یک تانک تغذیه را ممکن گردانیم، سیال باید در یک نازل همگرا واگرا ـ نظیر شکل ۶-۱۸- جریان یابد. جریان در بخش همگرای نازل [بدون توجه به فشار دریافت‌کننده p_R $(<P_1)$] همواره مادون صوت است. جریان در گذرگاه واگرا، برای محدوده خاصی از $\frac{p_R}{p_1}$ مافوق صوت می‌باشد (منحنیهای a و b در شکل ۶-۱۸ را ببینید). مقداری از p_R وجود دارد که در آن، مقدار جریان در گلوگاه [55] صوتی [56] است، جریان متناظر با این حالت، به عنوان جریان کیپ‌شده [57] شناخته می‌شود (منحنی c). کاهش بیشتر p_R ، نمی‌تواند در شرط گلوگاه تأثیری بگذارد. همچنین هیچ گونه تأخیری در نرخ سیلان به وجود نمی‌آورد.



شکل ۶-۱۸

یک فشار دریافت‌کننده p_R وجود دارد که برای آن، جریان می‌تواند به طور ایزنتروپیک تا p_R منبسط

55- Throat

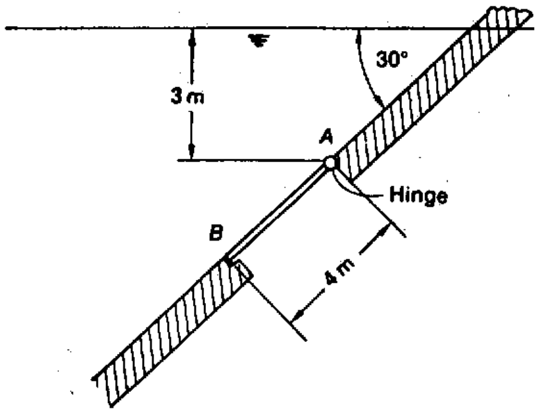
56- Sonic

57- Chocked flow

شود (منحنی خط پر c). اگر فشار p_R بین c و e باشد ـ نظیر d ـ جریان بعد از گلوگاه، برای مسافت کوتاهی مافوق صوت خواهدبود. پس از یک انقطاع[۵۸] در فشار (شوک فشاری) جریان برای مسافت باقیمانده ـ تا خروج ـ مادون صوت خواهدبود. اگر فشار دریافت‌کننده، زیر فشار منحنی e ـ در شکل ـ باشد، یک سری امواج انبساطی و امواج شوک مورب، خارج از نازل اتفاق می‌افتد.

مسائل

٦-١ – در شکل م ٦ - ١ ، دروازه AB مستطیل شکل (به عرض ٦٠ cm و طول ۴ m) می‌باشد که در لبه بالایی لولا شده‌است. از وزن دروازه صرف نظر شود. نیروی عکس‌العمل در B را بیابید. وزن مخصوص آب را ($62/4 lb/ft^3$) $9800 N/m^3$ بگیرید.



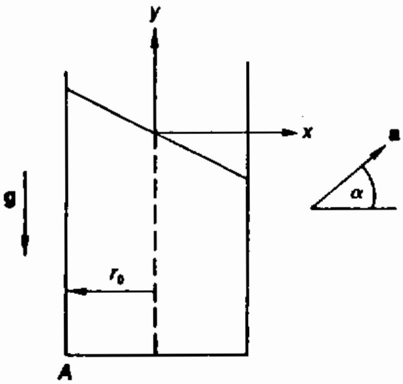
شکل م ٦-١

٦-٢– جامی از آب، به طور عمودی (به سوی بالا و با شتاب ثابت a) در حرکت است. فشار را در نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از سطح آب برابر h است.

٦-٣– جامی از آب با شتاب ثابت a (در جهت نشان داده‌شده در شکل م ٦ - ٢) حرکت می‌کند. فشار در نقطه A را بیابید. فشار آتمسفر را p_a بگیرید.

---

۵۸. یعنی افزایش در فشار، در فاصله بسیار کوتاهی صورت می‌پذیرد.



شکل م ۶ - ۲

۶-۴- مایعی در یک ظرف و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω، حول محور عمودی دوران می‌کند. شکل سطح مایع را پیدا کنید.

۶-۵- در کاربردهای فیزیک نجومی[59]، یک آتمسفر یا جو که به صورت زیر با چگالی و فشار رابطه دارد:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n,$$

(p_0 و ρ_0 فشار و چگالی مرجع می‌باشند)، به عنوان آتمسفر پلی‌تروپیک[60] شناخته می‌شود. توزیع فشار و چگالی را در یک آتمسفر پلی‌تروپیک پیدا کنید.

۶-۶- برای جریان موازی از یک سیال چسبنده خطی و تراکم‌ناپذیر، اگر جهت جریان را $\bar{e}_3$ بگیریم،

(الف) نشان دهید که میدان سرعت دارای شکل زیر است:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \text{و} \quad v_3 = v(x_1, x_2).$$

(ب) اگر $v(x_1, x_1) = x_2$، تنش عمودی کل، روی صفحهٔ با عمود e_2+e_3، را برحسب μ و p پیدا کنید.

(پ) تنشهای عمودی کل (توسط آن‌چه که «فشار» خوانده می‌شود) روی کدام صفحات داده می‌شود؟

۶-۷- میدان سرعت زیر برای یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی [با چسبندگی

59- Astrophysics

60- Polytropic

داده شده‌است: [$\mu =/\cdot ۹۶$mPa . s(۲×۱۰$^{-5}$lb sec/ft^2)

$$v_1 = x_1{}^2 - x_2{}^2, \quad v_2 = -2x_1x_2, \quad v_3 = 0.$$

در نقطه (۱ , ۲ , ۱) و روی صفحه‌ای با عمود در جهت e_1:

(الف) مقدار افزایش تنش فشاری عمودی کل -بر فشار p- را بیابید.

(ب) مقدار تنش برشی را به دست آورید.

۶-۸- مسئله ۶-۷ را انجام دهید، با این شرط که صفحه دارای عمود در جهت $3e_1+4e_2$ باشد.

۶-۹- جریان یک‌جهته پایداری را به دست آورید که از یک لایه سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر (به عمق یکنواخت d که از یک صفحه مایل که با افق زاویه θ می‌سازد) جاری است. جهت جریان، رو به پایین است.

۶-۱۰ - دو لایه‌از دو مایع به چسبندگی μ_1و μ_2و چگالی ρ_1و ρ_2، با عمقهای برابر، b، بین دو ورق موازی افقی و ثابت جریان دارند. توزیع سرعت را برای جریان یک‌جهته پایدار به دست آورید.

۶-۱۱- برای جریان هاگن - پوسوله در یک لوله مایل، ارتفاع پیزومتری[61] را به صورت $h=p/\rho g-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta$ تعریف می‌کنیم. از معادلات حرکت نشان دهید که

(الف) $h = h(x_1)$

(ب) ثابت = cdh/dx_1

۶-۱۲ - جریان یک سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر، در فضای مدور بین دو استوانه افقی هم‌محور، را در نظر بگیرید. شعاعها a و b هستند.

(الف) اگر تغییری در فشار، در جهت محوری وجود نداشته‌باشد و اگر سرعت استوانه‌های داخلی و خارجی به‌ترتیب v_a و v_b باشد، میدان جریان را پیدا کنید.

(ب) اگر یک گرادیان فشار، در جهت محوری وجود داشته‌باشد و هر دو استوانه ثابت باشند، میدان جریان را بیابید.

61- Piesometric head

۶-۱۳ – نشان دهید که برای میدان سرعت:

$$v_1 = v(y, z), \quad v_2 = v_3 = 0$$

معادلات ناویر ـ استوک، با $\rho \mathbf{B}=0$، به معادله زیر تقلیل می‌یابند

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=\beta= \text{ثابت}$$

۶-۱۴ – با مراجعه به مساله ۶-۱۳، یک لوله با سطح مقطع بیضوی به معادله $y^2/a^2+z^2/b^2=1$ داده‌شده را در نظر گیرید. با فرض این که $v = A(y^2/a^2+z^2/b^2)+B$، A و B را بیابید.

۶-۱۵ – با مراجعه به‌مساله ۶-۱۳، یک سطح مقطع به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع (که توسط صفحات $z+b/(2\sqrt{3})=0, z+\sqrt{3}y-b/\sqrt{3}=0, z-\sqrt{3}y-b/\sqrt{3}=0$ تعریف شده) را در نظر بگیرید. با فرض این که:

$$v = A(z+b/(2\sqrt{3}))(z+\sqrt{3}y-b/\sqrt{3})(z-\sqrt{3}y-b/\sqrt{3})+B$$

A و B را پیدا کنید.

۶-۱۶ – معادله (۶-۳۰) را اثبات کنید.

۶-۱۷ – توزیع درجه حرارت را در یک جریان پوسوله مسطح که ورق پایینی در دمای ثابت θ_1 و ورق بالا در دمای θ_2 است، به دست‌آورید. حرارت ایجادشده (توسط اتلاف ناشی از چسبندگی) را در نظر بگیرید.

۶-۱۸ – توزیع درجه حرارت را در یک جریان آرام بین دو استوانه هم‌محور (جریان کوئت) را محاسبه کنید. (دمای استوانه‌های داخلی و خارجی به ترتیب در مقادیر ثابت θ_1 و θ_2 هستند).

۶-۱۹ – معادله بنیادین برای یک سیال چسبنده خطی و تراکم‌ناپذیر را در مختصات استوانه‌ای نمایش دهید (از نتیجه مساله ۳-۴۸ استفاده کنید).

۶-۲۰ – با استفاده از نتایج مساله ۶-۱۹، مساله ۳-۴۶، و مساله ۴-۲۶، معادلات ناویر ـ استوک (داده‌شده در بخش ۶-۶) را در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۶-۲۱ – میدان سرعت یک سیال چسبنده خطی داده شده‌است:

$$v_1 = kx_1, \quad v_2 = -kx_2, \quad v_3 = 0.$$

(الف) نشان دهید که میدان سرعت، غیرچرخشی است.

(ب) تانسور تنش را بیابید.

(پ) میدان شتاب را پیدا کنید.

(ت) با یافتن مستقیم توزیع فشار ـ از معادلات ـ نشان دهید که میدان سرعت، معادلات ناویر ـ استوک را ارضا می‌کند. از نیروی حجمی صرف نظر شود. در مبداء فرض کنید

(ث) با استفاده از معادله برنولی، توزیع فشار را به دست آورید.

(ج) نرخ اتلاف انرژی مکانیکی به حرارتی را بیابید.

(چ) اگر $x_2=0$ یک مرز ثابت باشد، چه شرطی توسط میدان سرعت ارضا نمی‌شود.

۶-۲۲- مساله ۶ ـ ۲۱ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = k(x_1^2 - x_2^2), \quad v_2 = -2kx_1x_2, \quad v_3 = 0.$$

۶-۲۳- مؤلفه‌های چرخش را برای جریان پوسوله مسطح به دست آورید.

۶-۲۴- مؤلفه‌های چرخش را برای جریان هاگن ـ پوسوله به دست آورید (از نتایج مساله ۳ ـ ۴۹ استفاده کنید).

۶-۲۵- برای جریان دوبعدی از یک سیال تراکم‌ناپذیر، مؤلفه‌های سرعت را برحسب یک تابع عددی ψ (به عنوان تابع جریان لاگرانژ شناخته می‌شود) توسط روابط زیر نمایش می‌دهیم

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

(الف) نشان دهید که معادله بقای جرم، برای هر (x, y) ψ که دارای مشتقات پیوسته مرتبه دو باشد، به طور خودکار ارضا می‌شود.

(ب) خط جریان، خطی است که مماس بر آن ـ در هر نقطه ـ بر جهات لحظه‌ای سرعت سیال ـ در آن نقطه ـ منطبق شود. نشان دهید که برای جریان دوبعدی از یک سیال تراکم‌ناپذیر، ثابت = ψ خطوط جریان هستند، که ψ تابع جریان[62] لاگرانژ می‌باشد.

(پ) اگر میدان سرعت غیرچرخشی باشد، آن‌گاه $v_i=-\partial\Phi/\partial x_i$. نشان دهید که منحنیهای ثابت = ϕ و ثابت = ψ بر یکدیگر عمودند.

62- Stream

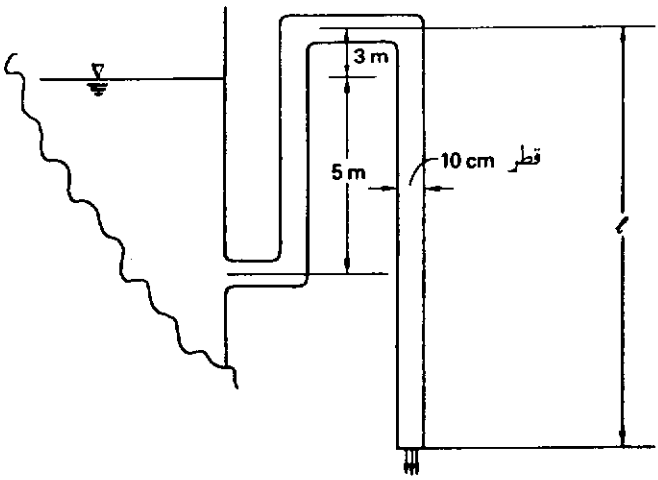
(ت) تنها مؤلفه غیرصفر چرخش را برحسب ψ به دست آورید.

۶-۲۶- نشان دهید که

$$\psi = V_0 y\left(1-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$$

یک جریان دوبعدی غیرچرخشی، معرف یک سیال غیرچسبنده‌است. خطوط جریان را در ناحیه $x^2+y^2 \geq a^2$ رسم نمایید.

۶-۲۷- با مراجعه به شکل م ۶-۳ حداکثر سیلان ممکن آب را محاسبه کنید. فشار آتمسفر را ۹۳/۱kPa(۱۳/۵lb/in²)، وزن مخصوص آب را ۹۸۰۰N/m³(۶۲/۴lb/ft³)، و فشار بخار را ۱۷/۲ kPa(۲/۵lb/in²) در نظر بگیرید. سیال را غیرچسبنده فرض کنید. l را برای نرخ تخلیه پیدا کنید.



شکل م ۶-۳

۶-۲۸- از طریق یک خط لوله عمودی آب، به سمت بالا جریان می‌یابد. قطر لوله در فاصله ۶ ft (۱/۸۳ m) از ۱۰ in (۲۵/۴ cm) به ۶ in (۱۵/۲ cm) تقلیل می‌یابد. اگر فشار در ابتدا و انتهای انقباض، به ترتیب ۳۰lb/in²(۲۰۷kpa) و ۲۵lb/in²(۱۷۲kpa) باشد، نرخ جریان چقدر است؟ سیال را غیرچسبنده در نظر بگیرید.

۶-۲۹-ثابت کنید که معادله بقای جرم برای مؤلفه‌های سرعت زیر

$$v_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v_3 = 0,$$

(که در آن، ψ تابعی از x و y و دارای مشتقات پیوسته مرتبه دو می‌باشد) به طور خودکار، ارضا می‌شود.

٦-۳۰- ثابت کنید که معادله بقای جرم، برای مؤلفه‌های سرعت زیر (در مختصات استوانه‌ای

$$v_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\phi = 0,$$

که در آن $\psi(r, z)$ هر تابعی از r و z با مشتقات مرتبه دو پیوسته می‌باشد) به طور خودکار ارضا می‌شود.

(مساله ۳-۵ را ببینید).

٦-۳۱- میدان سرعت زیر را در مختصات استوانه‌ای در نظر بگیرید:

$$v_r = v(r), \quad v_\phi = v_z = 0.$$

(الف) نشان دهید که $v(r)=A/(\rho r)$، که A یک ثابت است (مساله ۳-۵۰ را ببینید) به طوری که معادله بقای جرم ارضا می‌شود.

(ب) اگر نرخ سیلان جرم از طریق یک سطح استوانه‌ای مدور - به شعاع r و طول واحد - Q_m باشد، ثابت A را برحسب Q_m به دست آورید.

٦-۳۲- معادله (٦-۷۸) را استخراج کنید.

٦-۳۳- نشان دهید که برای یک سیال نیوتنی تراکم‌پذیر:

$$T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho\Delta + \Phi,$$

که در آن، $\Phi = \lambda\Delta^2 + \Phi_{\text{inc}}$

٦-۳۴- میدان سرعت و میدان چگالی زیر را برای یک سیال نیوتنی تراکم‌پذیر در نظر بگیرید:

$$v_1 = v(y), \quad v_2 = v_3 = 0, \quad \rho = \rho(y).$$

(الف) ثابت کنید که معادله بقای جرم ارضا می‌شود.

(ب) اگر چسبندگی ثابت فرض شود (یعنی مستقل از درجه حرارت) $v(y)$ را برای حرکت کوئت مسطح پیدا کنید. از نیروهای حجمی صرف نظر کنید.

(پ) با استفاده از معادله انرژی، توزیع آنتالپی را بیابید، اگر درجه حرارت، در ورقهای ثابت و متحرک به ترتیب θ_1 و θ_2 باشد. $H=c_p\theta$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که μ، c_p، و k همه ثابت و مستقل از درجه حرارت باشند، اتلاف چسبندگی را نیز در نظر بگیرید.

٦-۳۵- نشان دهید که برای جریان یک‌بعدی، پایدار و آدیاباتیک از یک گاز ایده‌آل، نسبت درجه

حرارت θ_1/θ_2 در مقاطع (۱) و (۲) توسط عبارت زیر داده می‌شود:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M_2^2},$$

که در آن، γ نسبت حرارت مخصوص، M_1 و M_2 به‌ترتیب عددهای موضعی ماخ (۱) و (۲) می‌باشند.

۶-۳۶- نشان دهید که برای یک سیال تراکم‌پذیر در جریان ایزوترمال با کار خارجی صفر داریم:

$$\frac{dM^2}{M^2}=2\frac{dv}{v},$$

که M عدد ماخ است (گاز را کامل فرض کنید).

۶-۳۷- نشان دهید که برای یک گاز کامل جاری، از طریق یک مجرا با مساحت ثابت و شرایط درجه حرارت ثابت:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{1}{2}\frac{dM^2}{M^2}.$$

۶-۳۸- برای جریان یک سیال غیرچسبنده تراکم‌پذیر (حول یک جسم نازک با سرعت یکنواخت جریان v_0 در جهت x_1) پتانسیل سرعت را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Phi=-V_0(x_1+\Phi_1),$$

که Φ بسیار کوچک فرض می‌شود. نشان دهید که برای جریان پایدار، معادله حاکم بر Φ_1، با $M_0\equiv v_0/c_0$، عبارت است از:

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_3^2}=0,$$

(مثال ۶-۲۵ را ببینید)

فصل ۷

فرمول‌بندی انتگرالی اصول عمومی

در بخشهای ۳-۹، ۴-۷، ۴-۴، و ۶-۱۲ معادلات میدان (که بقای جرم، اندازه حرکت خطی، ممان اندازه حرکت، و انرژی را نمایش می‌دادند) با لحاظ المانهای دیفرانسیل در محیط پیوسته استخراج شدند [معادلات (۳-۲۹)، (۴-۱۶)، (۵-۴)، و (۶-۴۲)] . اصول فوق در شکل معادلات دیفرانسیل، گاه به عنوان «اصول موضعی»[1] نیز شناخته می‌شوند. در این فصل، آنها را برحسب یک بخش ثابت - از محیط پیوسته - فرمول‌بندی خواهیم‌نمود. در نتیجه، مشکل انتگرالی خواهندیافت (از آنها گاه به عنوان اصول کلی[2] یاد می‌شود).

با فرض همواری[3] توابع مورد استفاده، دو شکل، کاملاً معادل هم می‌شوند و در حقیقت شرط اعتبار قضیه کلی[4] - برای هر بخش از محیط پیوسته - منجربه شکل دیفرانسیلی معادلات بقا می‌شود.

فصل حاضر هدف دوگانه‌ای را دنبال می‌کند: (۱) ارائهٔ شق و شیوه دیگری برای فرمول‌بندی معادلات میدان (که مبین اصول عمومی‌اند) و (۲) به دست‌دادن حلهای تقریبی برای برخی از مسائل

---

1. Local principles
2- Global principles
3- Smoothness
4- Global Theorem

مهندسی با استفاده از قضایای کلی با بهره‌گیری از مفهوم حجمهای متحرک (یا ثابت) و کنترل.

با اثبات قضیه گرین، آغاز خواهیم‌نمود. از آن‌جا، قضیه دیورژانس ـ از طریق تعمیم ـ معرفی خواهدشد (بدون‌اثبات) که در این فصل بدان احتیاج خواهیم‌داشت.

۷-۱ - قضیه گرین

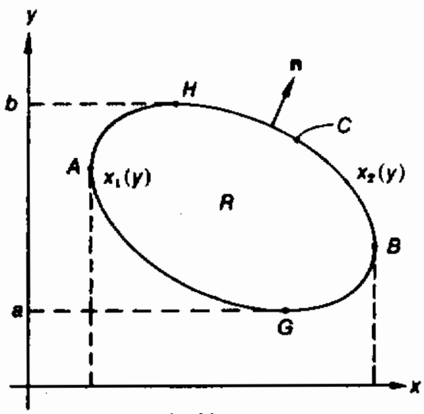
فرض کنید $P(x,y)$ و $\partial P/\partial x$ توابع پیوسته‌ای از x و y در ناحیه بسته R با مرز C باشند. فرض کنید $\mathbf{n}=n_x\mathbf{e}_1+n_y\mathbf{e}_2$ بردار یکه به‌طرف خارج C باشد. آن‌گاه **قضیه گرین** [5] بیان می‌کند که

$$\int_C Pn_x\, ds = \int_R \frac{\partial P}{\partial x}\, dA \tag{۱-۷}$$

و

$$\int_C Pn_y ds = \int_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA. \tag{۲-۷}$$

برای اثبات (و برای سهولت) فرض کنید که ناحیه R به‌گونه‌ای است که در آن، هر خط مستقیم (که از یک نقطه داخل ناحیه عبور کرده و موازی هر کدام از محورها باشد) مرز را دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند (شکل ۷ ـ ۱).



شکل ۷-۱

5- Green's theorem

فرض کنید a و b حداقل و حداکثر مقدار y روی C باشند (نقاط G و H در شکل). اگر $x=x_1(y)$ و $x=x_2(y)$ به‌ترتیب معادلات مرزهای HAG و GBH باشند، آن‌گاه:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_a^b \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x} dx \right] dy.$$

حال:

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x} dx = P(x, y) \Big]_{x_1(y)}^{x_2(y)} = P[x_2(y), y] - P[x_1(y), y].$$

بنابراین:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_a^b P[x_2(y), y]\, dy - \int_a^b P[x_1(y), y]\, dy$$
$$= \int_{GBH} P dy - \int_{GAH} P dy.$$

چون:

$$\int_{GAH} P dy = - \int_{HAG} P dy.$$

بنابراین:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_{GBH} P dy + \int_{HAG} P dy.$$

یعنی:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \oint P dy = - \oint P dy.$$

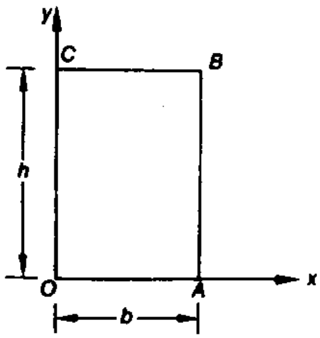
فرض کنید که S طول کمان در امتداد مرز C باشد و نیز فرض کنید $x=x(s)$ و $y=y(s)$ معادلات پارامتر یک منحنی مرز باشند. آن‌گاه اگر S در امتداد منحنی و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت اندازه گیری شود $dy/ds=+n_x$، و اگر S در امتداد منحنی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه گیری شود $dy/ds=-n_x$. بنابراین:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_C P n_x ds.$$

معادله (۷ ـ ۲) را به طریق مشابهی می‌توان اثبات نمود.

مثال ۷-۱

برای $P(x,y)=xy^2$، $\int_c P(x,t) n_x ds$ را در امتداد مسیر بسته $OABC$ (شکل ۲ ـ ۷) محاسبه کنید. همچنین انتگرال مساحت $\int_R (\partial P/\partial x) dA$ را به دست آورید. نتایج را مقایسه نمایید.



شکل ۷-۲

حل: داریم:

$$\int_C P(x,y)n_x ds = \int_{OA} x(0)^2(0)ds + \int_{AB} by^2(1)dy + \int_{BC} xh^2(0)ds$$
$$+\int_{CO}(0)y^2(-1)ds = \int_0^h by^2dy = \frac{bh^3}{3}.$$

به عبارت دیگر:

$$\int_R \frac{\partial P}{\partial x} dA = \int_R y^2 dA = \int_0^h y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{3}.$$

بنابراین دیده می‌شود که:

$$\int_C P n_x ds = \int_A \frac{\partial P}{\partial x} dA.$$

۷-۲- قضیه دیورژانس

فرض کنید که $\mathbf{v}=v_1(x,y)\mathbf{e}_1+v_2(x,y)\mathbf{e}_2$ یک میدان برداری باشد. با اعمال معادلات (۷-۱) و (۷-۲) و جمع آنها، داریم:

$$\int_C (v_1n_1+v_2n_2)\, ds = \int_R \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) dA. \qquad \text{(۷-۳الف)}$$

شکل شاخصی معادله (۷-۳الف) چنین است:

$$\int_C v_i n_i\, ds = \int_R \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dA \qquad \text{(۷-۳ب)}$$

و یا به شکل پایا

$$\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_R \operatorname{div}\mathbf{v}\, dA. \qquad \text{(۷-۳پ)}$$

تعمیم زیر، نه تنها طبیعی به نظر می‌رسد، که می‌توان اثبات کرد (از اثبات صرف نظر شده‌است)

$$\int_S v_i n_i \, dS = \int_R \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV, \qquad \text{(۷-۴ الف)}$$

یا به‌شکل پایا:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_R \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV, \qquad \text{(۷-۴ ب)}$$

S سطحی است که‌مرز کامل ناحیه R را در فضا تشکیل می‌دهد و **n** بردار یکهٔ عمود بر S به طرف خارج می‌باشد. معادله (۷-۴) به عنوان **قضیه دیورژانس**[6] **(یا قضیه گوس)** شناخته می‌شود. قضیه، به شرطی معتبر است که مؤلفه‌های v پیوسته بوده، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول در R باشند. همچنین این قضیه، با محدودیت کمتری، برای مشتقات معتبر است.

و نیز، اگر T_{ij} مؤلفه‌های تانسور **T** باشند، آن‌گاه استفاده از معادله (۷-۴ الف) می‌دهد:

$$\int_S T_{ij} n_j \, dS = \int_R \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \qquad \text{(۷-۵ الف)}$$

یا به شکل پایا:

$$\int_S \mathbf{T}\mathbf{n} \, dS = \int_R \operatorname{div} \mathbf{T} \, dV, \qquad \text{(۷-۵ ب)}$$

که مؤلفه‌های دکارتی divT، طبق تعریف عبارت‌اند از: $\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}$.

معادله (۷-۵) قضیه دیورژانس برای یک میدان تانسوری است. واضح است که برای میدانهای تانسوری مرتبه بالاتر، معادله (۷-۵ ب) همچنان معتبر است به شرط آن‌که مؤلفه‌های دکارتی divT بدین صورت تعریف شوند: ۵ $T_{ij...f}$\ ۵ x_i

مثال ۷-۲

فرض کنید که **T** یک میدان تانسور تنش و S یک سطح بسته باشد. نشان دهید که برایند نیروهای گسترده روی S توسط $\int_V (\operatorname{div}\mathbf{T}) dV$ داده‌می‌شود.

حل: فرض کنید که **f** برآیند نیرو باشد، آن‌گاه

$$\mathbf{f} = \int_S \mathbf{t} \, dS,$$

که **t** بردار تنش می‌باشد. اما **t=Tn**، بنابراین، از قضیه دیورژانس داریم:

$$\mathbf{f} = \int_S \mathbf{t} \, dS = \int_S \mathbf{T}\mathbf{n} \, dS = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}) dV, \qquad \text{(۷-۶ الف)}$$

6- Divergence theorem

یعنی

$$f_i = \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\, dV. \qquad \text{(۷-۶ ب)}$$

مثال ۷-۳

با رجوع به‌مثال ۷-۲، نشان دهید که برآیند ممان‌حول نقطه ثابت O- از نیروهای گسترده روی S- توسط

$$\int \{\mathbf{x} \times (\operatorname{div} \mathbf{T}) + 2\mathbf{t}^A\}\, dV,$$

داده می‌شود که در آن، $\mathbf{x}$ بردار موقعیت از نقطه ثابت O و $\mathbf{t}^A$ بردار دوگان بخش پادمتقارن $\mathbf{T}$ می‌باشند (بخش ۲ ب ۱۱ از فصل ۲ را برای تعریف بردار یک تانسور پادمتقارن نگاه کنید).

حل: اگر $\mathbf{m}$ نمایشگر برایند ممان حول O باشد. آن‌گاه:

$$\mathbf{m} = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, dS.$$

فرض کنید m_i مؤلفه‌های $\mathbf{m}$ باشند، آن‌گاه:

$$m_i = \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k\, dS = \int_S \epsilon_{ijk} x_j T_{kp} n_p\, dS.$$

با استفاده از قضیه دیورژانس، معادله (۷-۵ الف)، داریم:

$$m_i = \int_V \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j T_{kp})\, dV.$$

حال:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j T_{kp}) = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_p} T_{kp} + x_j \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p} \right)$$
$$= \epsilon_{ijk} \left(\delta_{jp} T_{kp} + x_j \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p} \right) = \epsilon_{ipk} T_{kp} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}.$$

توجه کنید که $\in_{ipk}T_{kp}=-\in_{ikp}T_{kp}$ مؤلفه‌های دوبرابر بردار دوگان بخش پادمتقارن $\mathbf{T}$ می‌باشند، و $\in_{ijk}x_j(\partial T_{kp}/\partial x_p)$ مؤلفه‌های $\mathbf{x}\times(\operatorname{div}\mathbf{T})$ هستند. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\mathbf{m} = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, dS = \int \{\mathbf{x} \times (\operatorname{div} \mathbf{T}) + 2\mathbf{t}^A\}\, dV. \qquad \text{(۷-۷)}$$

مثال ۷-۴

با مراجعه به‌مثال ۷-۲، نشان دهید که توان کل (نرخ کار انجام‌شده) توسط بردار تنش روی S، به‌وسیله رابطه زیر داده‌می‌شود، با توجه به $\operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{A}})=A_{ii}$:

$$\int_V \{(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{v})\}\, dV,$$

که $\mathbf{v}$ میدان سرعت است.

حل: فرض کنید که P توان کل باشد، آن‌گاه:

$$P = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, dS = \int_S \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{v}\, dS.$$

اما طبق تعریف برگردان $\mathbf{Tn}.\mathbf{v}=\mathbf{n}.\mathbf{T}^T\mathbf{v}$. بنابراین:

$$P = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}^T\mathbf{v})\, dS.$$

با به کارگیری قضیه دیورژانس داریم:

$$P = \int_V \operatorname{div} (\mathbf{T}^T\mathbf{v})\, dV.$$

حال:

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}^T\mathbf{v}) = \frac{\partial (T_{ji} v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i} v_j + T_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{v}). \qquad (۸-۷)^{۷}$$

بنابراین:

$$P = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, dS = \int_V \{ (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{v}) \}\, dV.$$

۷-۳- انتگرال حول یک حجم کنترل و انتگرال حول یک حجم مادی

نخست یک مساله یک‌بعدی را در نظر بگیرید که در آن، حرکت به صورت زیر داده شده‌است (با زمان مرجع اختیاری t_0):

$$x_1 = x_1(X_1, t), \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3, \qquad \text{با} \quad X_1 = x_1(X_1, t_0), \qquad (۹-۷)$$

و میدان چگالی توسط رابطه زیر:

$$\rho = \rho(x_1, t). \qquad (۱۰-۷)$$

انتگرال

$$m(t, a, b) = \int_{x_1=a}^{x_1=b} \rho(x_1, t)(A\, dx_1) \qquad (۱۱-۷)$$

کل جرم موجود در حجم استوانه (و ثابت به لحاظ فضایی) را با سطح مقطع ثابت A(و محدود به وجوه

---

۷. تعریف $\operatorname{div}\mathbf{T}$ را نیز در بخش ۲ ب ۲۰ ببینید، معادله (ب ۵۹).

انتهایی $x_1=a$ و $x_1=b$) و در زمان t می‌دهد.

از سوی دیگر، اگر $X_1=a$ و $X_1=b$ ذراتی باشند که به ترتیب در زمان t_0 در $x_1=a$ و $x_1=b$ باشند، یعنی:

$$x_1(a, t_0) = a,$$
$$x_1(b, t_0) = b. \qquad (۱۲-۷)$$

آن‌گاه انتگرال

$$M(t, a, b) = \int_{x_1(a,t)}^{x_1(b,t)} \rho(x_1, t) A\, dx_1 \qquad (۱۳-۷)$$

جرم را در زمان t از آن قسمت از ماده می‌دهد که در زمان t، به طور لحظه‌ای با ماده داخل مرزهای ثابت سطح ـ لحاظ شده در m ـ منطبق می‌شود، یعنی:

$$m(t_0, a, b) = M(t_0, a, b). \qquad (۱۴-۷)$$

اما در زمانهای دیگر $m \neq M$، و به خصوص

$$m(t_0+dt, a, b) \neq M(t_0+dt, a, b).$$

به عبارت دیگر، در زمان $t=t_0$:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right) \neq \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right).$$

وضوح این‌مطلب از آن‌جا ناشی می‌شود که، حدهای‌انتگرال در معادله (۷-۱۳) وابسته به زمان می‌باشند. از نظر فیزیکی $\partial m/\partial t$ نرخی است که تحت آن، جرم داخل حجم ثابت (به عنوان **حجم کنترل**[۸]) و محدود در سطح جانبی استوانه‌ای و وجوه‌انتهایی $x=a$ و $x=b$ به دست می‌آید، حال آن‌که $\partial M/\partial t \equiv DM/Dt$ نرخ افزایش جرم آن بخش از ماده را می‌دهد که در زمان $t=t_0$ منطبق بر ماده موجود در حجم‌کنترل بوده‌است. واضح است که این دو باید متقارن باشند، چون اصل بقای جرم، نیازمند آن است که $DM/Dt=0$ باشد، در حالی که جرم موجود در داخل حجم‌کنترل نیازمند این نیست.

مثال فوق نمایش‌دهنده دو نوع انتگرال حجمی است (که ما در بخشهای آتی آنها را به کار خواهیم‌گرفت). V_c را برای نمایش یک **حجم کنترل** و V_m را برای نمایش **حجم مادی**[۹] به‌کار

8- Control volume

9- Material volume

خواهیم برد. یعنی انتگرالهای $\int vc\psi(x,t)dV$ و $\int v_m\psi(x,t)dV$ به‌ترتیب روی حجمهای کنترل و مادی می‌باشند.

۷-۴- اصل بقای جرم

اصل عمومی بقای جرم[10] را می‌توان به دو شکل زیر فرمول‌بندی نمود:

(I) نرخ زمانی که تحت آن، جرم داخل یک حجم کنترل افزایش می‌یابد = جرم ورودی[11] (یعنی نرخ خالص جرم ورودی) از طریق حجم کنترل، یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{Vc} \rho(\mathbf{x},t)\,dV = -\int_{Sc} (\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS, \qquad (۷-۱۵)$$

که علامت منفی در انتگرال طرف راست، به علت این قرارداد است که $\mathbf{n}$ یک برداریکه به طرف خارج می‌باشد.

حال، چون V_c مستقل از زمان است، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_c} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV \qquad (۷-۱٦)$$

و بر طبق قضیه دیورژانس:

$$\int_{Sc} (\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = \int_{Vc} \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\,dV, \qquad (۷-۱۷)$$

بنابراین معادله (۷-۱۵) به صورت زیر نوشته‌می‌شود:

$$\int_{V_c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right]dV = 0. \qquad (۷-۱۸)$$

با نیاز به‌این‌که معادله فوق برای تمامی V_c باید معتبر باشد، به معادله پیوستگی (که قبلاً استخراج شد) می‌رسیم [بخش ۳-۹، معادله (۳-۲۹) را ببینید].

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \qquad (۷-۱۹)$$

(II) کل جرم یک بخش ثابت ـ از ماده ـ در تمامی زمانها باید ثابت باقی بماند. یعنی:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \rho(x,t)\,dV = 0. \qquad (۷-۲۰)$$

10- Golbal principle of conservation of mass

11- mass influx

حال:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m}\rho(x,t)\,dV=\int_{V_m=V_c}\frac{D}{Dt}(\rho\, dV)$$
$$=\int_{V_c}\frac{D\rho}{Dt}\,dV+\int_{V_c}\rho\frac{D}{Dt}(dV).$$

توجه کنید که در یک لحظه داده‌شده t، $V_c=V_m$، و

(معادله ۳-۲۸ را ببینید)
$$\frac{1}{dV}\frac{D}{Dt}dV=\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

بنابراین، معادله (۷-۲۰) را می‌توان چنین نوشت:

(۲۱-۷)
$$\int_{V_c}\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}\right)dV=0.$$

که نظیر معادله (۷-۱۸) می‌باشد. توجه کنید که: $D\rho/Dt=(\partial\rho/\partial t)+(\nabla\rho)\cdot\mathbf{v}.$

مثال ۷-۵

برای میدانهای سرعت و چگالی زیر:

(ρ_0 = ثابت)
$$v_1=\frac{x_1}{1+t},\quad v_2=v_3=0,\quad \rho=\frac{\rho_0}{1+t}$$

(الف) ارضای معادله پیوستگی را بررسی کنید.

(ب) کل جرم و نرخ افزایش جرم، در داخل یک حجم کنترل استوانه‌ای به سطح مقطع A و با سطوح انتهایی $x_1=1$ و $x_1=3$ را محاسبه کنید.

(پ) نرخ خالص جرم ورودی به داخل حجم کنترل بند (ب) را به دست آورید.

حل: (الف) داریم:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+\rho\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=-\frac{\rho_0}{(1+t)^2}+\frac{x_1}{(1+t)}(0)+\frac{\rho_0}{(1+t)^2}=0.$$

بنابراین، معادله پیوستگی ارضا می‌شود.

(ب) کل جرم داخل حجم کنترل در زمان t عبارت است از:

$$m(t)=\int_{V_c}\rho(x,t)\,dV=\int_{x_1=1}^{x_1=3}\frac{\rho_0}{1+t}A\,dx_1=\frac{A\rho_0}{1+t}(2)=\frac{2A\rho_0}{1+t}$$

و نرخی که جرم داخل حجم کنترل در زمان t افزایش می‌یابد عبارت است از:

$$\frac{\partial m}{\partial t}=-\frac{2A\rho_0}{(1+t)^2},$$

یعنی، جرم تقلیل می‌یابد.

(پ) سیلان ورودی و خروجی، از طریق سطح جانبی حجم کنترل وجود ندارد. از طریق وجه انتهایی $x_1=1$ نرخ

جریان ورودی عبارت است از:

$$(\rho A v)_{x_1=1} = \frac{\rho_0 A}{(1+t)^2}.$$

از سوی دیگر، جرم خروجی از طریق وجه انتهایی $x_1=3$ عبارت است از:

$$(\rho A v)_{x_1=3} = \frac{3\rho_0 A}{(1+t)^2}.$$

بنابراین، جرم خالص ورودی برابر است با:

$$-\frac{2\rho_0 A}{(1+t)^2}.$$

که همان نتیجه بند (ب) است.

مثال ۷-٦

(الف) بررسی کنید که حرکت (به زمان مرجع t_0 توجه کنید)

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0} X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

متناظر با میدان سرعت داده‌شده در مساله قبل است.

(ب) اگر میدان چگالی به صورت $\rho=\rho_0/(1+t)$ داده‌شود، کل جرم ماده در زمان t را (که در زمان t در داخل حجم کنترل مثال قبل قرار داشته) پیدا کنید.

(پ) همچنین مقدار حرکت خطی برای بخش ثابت ماده (لحاظ شده در بند «ب») را محاسبه کنید.

حل: (الف) نخست توجه کنید که وقتی $t=t_0$

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3,$$

یعنی، $t=t_0$ زمان مرجع (اختیاری) است. حال:

$$v_1 = \frac{Dx_1}{Dt} = \frac{X_1}{1+t_0}, \quad v_2 = \frac{Dx_2}{Dt} = 0, \quad v_3 = \frac{Dx_3}{Dt} = 0,$$

و

$$X_1 = \frac{1+t_0}{1+t} x_1,$$

بنابراین داریم:

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = v_3 = 0.$$

(ب) ذرات در $x_1=1$ و $x_1=3$، در زمان $t=t_0$ به‌ترتیب دارای مختصات مادی $X_1=1$ و $X_1=3$ می‌باشند. بنابراین،

کل جرم در زمان t عبارت است از:

$$M = \int_{x_1 = \frac{1+t}{1+t_0}}^{x_1 = 3\frac{1+t}{1+t_0}} \frac{\rho_0}{1+t} A\,dx_1 = \frac{\rho_0 A}{1+t}\left(\frac{3(1+t)}{1+t_0} - \frac{1+t}{1+t_0}\right) = \frac{2\rho_0 A}{1+t_0}.$$

مشاهده می‌کنید که این انتگرالِ وابسته به زمان، به چیزی مستقل از زمان تبدیل می‌شود. چرا که چگالی و میدان سرعت انتخاب‌شده، معادله پیوستگی را ارضا می‌کند، به طوری که ثابت‌ماندن جرم یک بخش ثابت از ماده، تضمین می‌شود.

(پ) چون $v_2 = v_3 = 0$، کل مقدار حرکت خطی عبارت است از:

$$\mathbf{P} = \int_{x_1 = \frac{1+t}{1+t_0}}^{\frac{3(1+t)}{1+t_0}} \rho v_1 A\,dx_1 \mathbf{e}_1 = \frac{A\rho_0}{(1+t)^2}\int_{\frac{1+t}{1+t_0}}^{\frac{3(1+t)}{1+t_0}} x_1\,dx_1 \mathbf{e}_1$$
$$= \frac{A\rho_0}{(1+t)^2}\left[\frac{9(1+t)^2}{2(1+t_0)^2} - \frac{(1+t)^2}{2(1+t_0)^2}\right]\mathbf{e}_1 = \frac{4A\rho_0}{(1+t_0)^2}\mathbf{e}_1.$$

این حقیقت که P نیز ثابت می‌باشد، یک امر تصادفی است و علت آن، بی‌شتاب‌بودن حرکت داده‌شده است و متناظر با عدم اعمال نیروی خالص به حجم ماده می‌باشد. به طوری کلی، مقدار حرکت خطی برای یک بخش ثابت از ماده، تابعی از زمان می‌باشد.

۷-۵- اصل اندازه حرکت خطی

اصل کلی اندازه حرکت خطی[۱۲] بیان می‌کند که کل نیروی (نیروهای سطحی و حجمی) وارده به هر بخش ثابت از ماده، برابر با نرخ تغییر اندازه حرکت خطی آن قسمت است. یعنی اگر ρ نشانگر چگالی، $\mathbf{v}$ سرعت، $\mathbf{t}$ بردار تنش، و $\mathbf{B}$ نیروی حجمی بر واحد جرم باشند، قضیه بیان می‌کند که:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \rho \mathbf{v}\,dV = \int_{S_c} \mathbf{t}\,dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{B}\,dV. \qquad (۷-۲۲)$$

مجدداً توجه کنید که در یک لحظه‌معین t، V_c، همسان V_m است. حال، چون $(D/Dt)(\rho dV) = 0$، داریم:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \rho \mathbf{v}\,dV = \int_{V_m = V_c} \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}\,dV) = \int_{V_c} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\rho\,dV. \qquad (۷-۲۳)$$

12- Global principle of Linear momentum

با استفاده از معادله (۷ـ۲۳) و با تبدیل انتگرال سطح (در معادله ۷ـ۲۲) به انتگرال حجم (مثال ۷ـ۲ را ببینید)، معادله (۷ـ۲۲) می‌شود:

$$\int_{V_c}\left(\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}-\operatorname{div}\mathbf{T}-\rho\mathbf{B}\right)dV=0. \tag{۲۴-۷}$$

که از آن، مجدداً به معادله میدان حرکت می‌رسیم:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{B}. \tag{۲۵-۷}$$

از سوی دیگر، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_{V_m}\rho v_i\,dV&=\int_{V_c}\frac{D(\rho v_i)}{Dt}dV+\int_{V_c}\rho v_i\left[\frac{D}{Dt}(dV)\right]\\&=\int_{V_c}\left\{\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+v_j\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j}+\rho v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right\}dV\\&=\int_{V_c}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}dV+\int_{V_c}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\,dV.\end{aligned} \tag{۲۶-۷}$$

اما طبق قضیه دیورژانس:

$$\int_{V_c}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\,dV=\int_{S_c}\rho v_i v_j n_j\,dS=\int_{S_c}\rho v_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{۲۷-۷}$$

بنابراین:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m}\rho\mathbf{v}\,dV=\int_{V_c}\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}dV+\int_{S_c}\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{۲۸-۷}$$

گاه از معادله (۷ـ۲۸) به عنوان **قضیه انتقال رینولدز**[13] برای اندازه حرکت خطی یاد می‌شود. با استفاده از این نتیجه، اصل اندازه حرکت شکل معادله موازنهٔ[14] زیر را به خود می‌گیرد:

$$\int_{S_c}\mathbf{t}\,dS+\int_{V_c}\rho\mathbf{B}\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c}\rho\mathbf{v}\,dV+\int_{S_c}\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{۲۹-۷}$$

این معادله، در قالب لفظ مبین این است که **کل نیروی اعمال‌شده روی یک بخش ثابت از ماده**

13- Reynolds transport theorem

14- Balance equation

(که به طور لحظه‌ای در حجم کنترل V_c قرار دارد) = نرخ زمانی تغییر کل اندازه حرکت خطی داخل حجم کنترل + شار خروجی خالص اندازه حرکت خطی از طریق سطح کنترل S_c. معادله (۷ ـ ۲۹) برای به دست آوردن نتایج تقریبی در بسیاری از مسائل مهندسی مفید است.

مثال ۷-۷

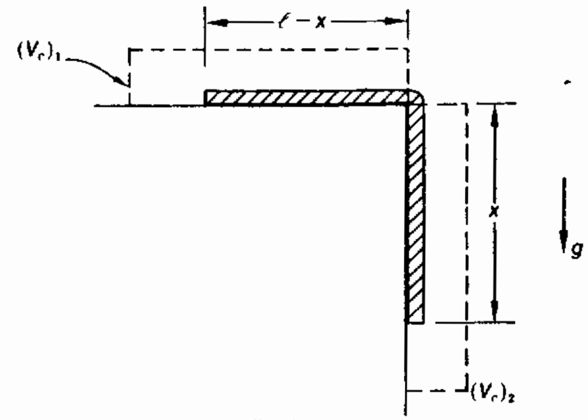
یک طناب همگن به طول l و جرم‌کل m از گوشه یک میز صاف و هموار فرومی‌لغزد. حرکت طناب و کشش در گوشه را بیابید.

حل: فرض کنید که x، بخشی از طناب باشد که در زمان t به پایین لغزیده‌است. پس بخشی که روی میز در زمان t می‌ماند عبارت است از l-x. حجم کنترل را مثل (V_c) نشان داده شده در شکل ۷ ـ ۳ بگیرید. در این صورت، اندازه حرکت در جهت افقی به داخل حجم کنترل در هر زمان t (با نمایش $\dot{x}$ به صورت dx/dt) عبارت است از:

$$\frac{m}{l}(l-x)\dot{x}$$

و شار خروجی اندازه حرکت خالص عبارت است از $\dot{x}(\dot{x}(m/l))$. بنابراین، اگر T نمایشگر کشش در نقطه گوشه‌ای طناب در زمان t باشد، داریم:

$$T=\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{l}(l-x)\dot{x}\right\}+\frac{m}{l}\dot{x}^2=\frac{m}{l}(-\dot{x})\dot{x}+\frac{m}{l}(l-x)\ddot{x}+\frac{m}{l}\dot{x}^2,$$



شکل ۷-۳

یعنی

$$T=\frac{m}{l}(l-x)\ddot{x}. \quad \text{(I)}$$

همان‌گونه که انتظار می‌رفت.

از سوی دیگر، با لحاظ حجم کنترل (V_c) (شکل ۷-۳ را ببینید)، مقدار حرکت در جهت پایین $[((m/l)x)\dot{x}]$ و مقدار حرکت ورودی در همان جهت $[((m/l)\dot{x})\dot{x}]$ را خواهیم‌یافت.

$$-T+\left(\frac{m}{l}x\right)g=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{l}x\dot{x}\right)-\frac{m}{l}\dot{x}^2.$$

یعنی:

$$-T+\frac{m}{l}xg=\frac{m}{l}x\ddot{x}. \qquad \textbf{(II)}$$

ازمعادلات (I) و (II) داریم:

$$\frac{m}{l}(l-x)\ddot{x}=\frac{m}{l}xg-\frac{m}{l}x\ddot{x}.$$

یعنی:

$$\ddot{x}-\frac{g}{l}x=0. \qquad \textbf{(III)}$$

حل عمومی معادله (III) عبارت است از:

$$x=C_1e^{\sqrt{(g/l)}t}+C_2e^{-\sqrt{(g/l)}t}.$$

بنابراین، اگر طناب، حرکت را از سکون آغاز کند و دارای طول آویخته اولیه x_0باشد، داریم:

$$x_0=C_1+C_2.$$

$$0=C_1-C_2.$$

که می‌دهد $C_1=C_2=x_0/2$، پاسخ خواهدشد:

$$x=\frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{(g/l)}t}+e^{-\sqrt{(g/l)}t}\right).$$

کشش در گوشه، توسط عبارت زیر داده‌می‌شود:

$$T=\frac{m}{l}(l-x)\ddot{x}=\frac{m}{l}(l-x)\left(\frac{g}{l}x\right).$$

توجه کنید که حرکت را نیز می‌توان با لحاظ تمامی طناب به صورت یک سیستم، به دست آورد. در حقیقت، اندازه حرکت خطی کل طناب در هر لحظه t، عبارت است از:

$$\frac{m}{l}(l-x)\dot{x}\mathbf{e}_1+\frac{m}{l}x\dot{x}\mathbf{e}_2.$$

نرخ تغییر آن برابر است با:

$$\frac{m}{l}\left[(l-x)\ddot{x}-\dot{x}^2\right]\mathbf{e}_1+\frac{m}{l}(x\ddot{x}+\dot{x}^2)\mathbf{e}_2.$$

و کل برآیند نیرو روی طناب عبارت است از:

$$\frac{m}{l} x g \mathbf{e}_2.$$

بنابراین، با مساوی قراردادن‌نیرو و نرخ تغییر اندازه حرکت برای طناب، به دست می‌آید:

$$(l-x)\ddot{x} - \dot{x}^2 = 0,$$

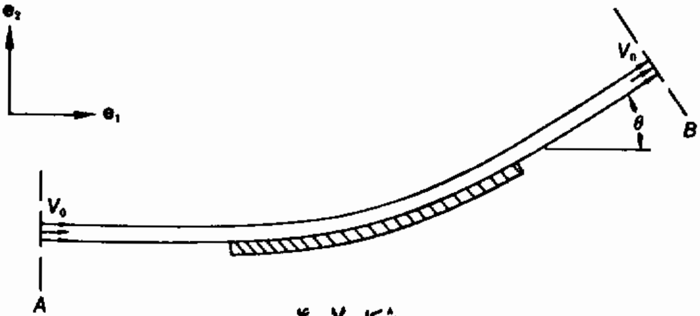
و

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx.$$

با حذف $\dot{x}^2$از دو معادله فوق، معادله (III) مجدداً به دست می‌آید.

مثال ۷-۸

شکل ۷-۴ یک جت پایدار از آب را نشان می‌دهد که بر روی یک تیغه خمیده[15]، در جهت مماسی برخورد می‌کند. با صرف نظر از اثر وزن (نواحی جریان بالا و پایین نظیر Aو Bرا با سرعت یکنواخت v_0 فرض کنید) برآیند نیروی (بالای نیروی ناشی از فشار جو) اعمال‌شده روی تیغه، توسط جت را بیابید (حجم نرخ سیلان Qاست).



شکل ۷-۴

حل: اگر آن بخش از جت را که توسط صفحات Aو Bمحدود شده، به عنوان حجم کنترل در نظر بگیریم و اگر فرض کنیم که جریان نزدیک Aو Bیکنواخت و با سرعت v_0است، آن‌گاه بردار تنش روی Aو Bعمود بر صفحه بوده و برابر فشار جو (که ما آن را صفر در نظر می‌گیریم) است. بنابراین، تنها نیروی وارده به ماده در حجم کنترل، از طرف تیغه است. برآیند این نیروها را $\mathbf{F}$ بگیرید. چون جریان پایدار است، نرخ افزایش اندازه حرکت داخل حجم کنترل، صفر

15- Curved vane

است.

خروجی اندازه حرکت خطی از طریق B، $\rho Q(v_0\cos\theta \mathbf{e}_1 + v_0\sin\theta \mathbf{e}_2)$ و نرخ اندازه حرکت خطی ورودی از طریق A برابر $\rho Q(v_0\mathbf{e}_1)$ می‌باشد. بنابراین:

$$\mathbf{F} = \rho Q[v_0(\cos\theta - 1)\mathbf{e}_1 + v_0\sin\theta\,\mathbf{e}_2].$$

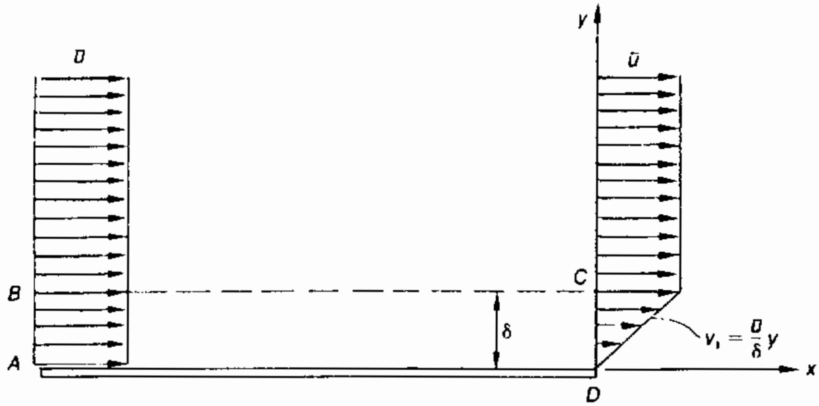
به عبارت دیگر:

$$F_x = -\rho Q v_0(1-\cos\theta),$$
$$F_y = \rho Q v_0 \sin\theta.$$

مؤلفه‌های نیرو روی تیغه ـ ناشی از جت آب ـ برابر و در جهت مخالف F_x و F_y می‌باشند.

مثال ۷-۹

برای یک جریان لایه مرزی[16] از آب، روی یک ورق مسطح، اگر پروفیل سرعت[17] و مؤلفه‌های افقی آن در لبه‌های ابتدایی و انتهایی ورق، مطابق شکل ۷-۵ فرض شود، نیروی برشی وارده به‌سیال، توسط ورق را بیابید. فرض کنید که جریان پایدار بوده و فشار در تمامی جریان یکنواخت است.



شکل ۷-۵

حل: حجم کنترل $ABCD$ را در نظر بگیرید. چون فشار یکنواخت فرض شده و نیز مؤلفه افقی جریان، خارج از لایه مرزی δ دارای سرعت یکنواخت است و مؤلفه‌های عمودی سرعت بسیار کوچک‌اند (به طوری که تنش برشی روی

16- Boundary layer flow

17- Velocity profile

BC قابل صرف نظر است)، بنابراین، نیروی خالص روی حجم کنترل، برابر نیروی برشی ورق می‌باشد. با نمایش این نیرو (بر واحد عرض در جهت Z) توسط Fe_1، از اصل اندازه حرکت داریم:

F = مقدار خالص خروجی اندازه حرکت x از طریق $ABCD$

یعنی:

$$F = \int_{S_c} v_1(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = -\int_0^\delta \bar{u}(\rho \bar{u})\, dy + \int_{BC} \bar{u}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS + \int_0^\delta \rho\left(\frac{\bar{u}^2 y^2}{\delta^2}\right) dy + \int_{AD} (0)\, dS.$$

بنابراین:

$$F = -\rho \bar{u}^2 \delta + \frac{\rho \bar{u}^2 \delta}{3} + \bar{u} \int_{BC} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

از اصل بقای جرم داریم:

$$\int_{BC} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS - \int_0^\delta \rho \bar{u}\, dy + \int_0^\delta \rho \frac{\bar{u}}{\delta} y\, dy = 0.$$

یعنی:

$$\int_{BC} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = \rho \bar{u} \delta - \frac{\rho \bar{u} \delta}{2} = \frac{\rho \bar{u} \delta}{2}.$$

بنابراین:

$$F = -\rho \bar{u}^2 \delta + \frac{\rho \bar{u}^2 \delta}{3} + \frac{\rho \bar{u}^2 \delta}{2} = -\frac{\rho \bar{u}^2 \delta}{6}.$$

یعنی، نیرو بر واحد عرض روی سیال ـ توسط ورق ـ به طرف چپ و با مقدار $\rho\ \bar{u}^2\delta/6$ وارد می‌شود.

۷-۶- پیرامون حجم کنترل متحرک

مسائل خاصی وجود دارند (مثالهایی از آن، به‌زودی ارائه می‌شود) که در آنها،استفاده از حجم کنترل متحرک سودمند است. برای این منظور، نخست اصل اندازه حرکت را (که برای یک چهارچوب متحرک معتبر باشد) استخراج می‌کنیم.

از دوره مکانیک اجسام صلب، دریافته‌ایم که اگر F_1 و F_2 دو چهارچوب مرجع باشند، برای هر بردار $\mathbf{b}$ داریم:

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{F_1} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{F_2} + \omega \times \mathbf{b}. \tag{۷-۳۰}$$

که ω سرعت زاویه‌ای چهارچوب F_2 نسبت به F_1 است.

فرض کنید که $\mathbf{r}$ بردار موقعیت یک جرم دیفرانسیل dm در محیط پیوسته (نسبت به F_1) و $\mathbf{x}$ بردار موقعیت نسبت به F_2 باشد (شکل ۷-۶ را ببینید). آن‌گاه سرعت (dm) نسبت به F_1 برابر $(d\mathbf{r}/dt)_{F1}$ و نسبت به F_2 برابر $(d\bar{x}/dt)_{F2}$ می‌باشد.

چون:

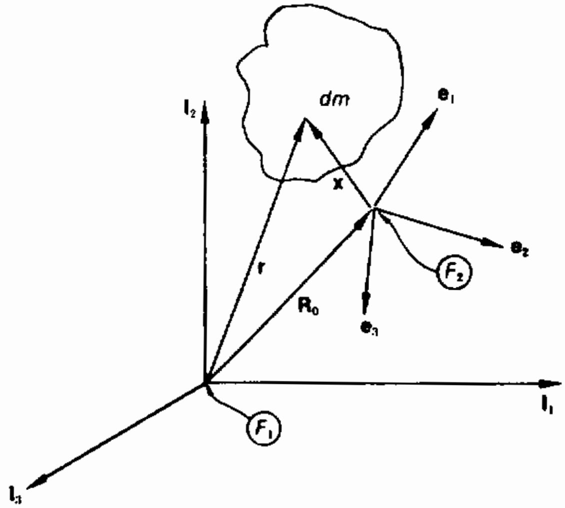
$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{x}. \tag{۳۱-۷}$$

لذا:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{F_1} = \left(\frac{d\mathbf{R}_0}{dt}\right)_{F_1} + \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_{F_1}. \tag{۳۲-۷}$$

بنابراین:

$$\mathbf{v}_F = (\mathbf{v}_0)_{F_1} + (\mathbf{v})_{F_2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \tag{۳۳-۷}$$



شکل ۷-۶

بدین ترتیب اندازه حرکت خطی نسبت به F_1 برابر $\int \mathbf{v}_{F1}$ و نسبت به F_2 برابر $\int \mathbf{v}_{F2}$ می‌باشد. نرخهای تغییر اندازه حرکت خطی، به طریق زیر مرتبط می‌شوند:[۱۸]

۱۸. برای سادگی، شاخصهای پایین انتگرالهای V_m را حذف کرده‌ایم.

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{v}_{F_1}\,dm=\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\left[(\mathbf{v}_0)_{F_1}\int dm+\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}\,dm\right] \qquad (۷-۳۴)$$
$$= (\mathbf{a}_0)_{F_1}\int dm+\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm+\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\left\{\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}\,dm\right\}.$$

حال:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm=\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_2}\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm \qquad (۷-۳۵)$$

و

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\left\{\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}\,dm\right\}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\int \mathbf{x}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{x}\,dm \qquad (۷-۳۶)$$
$$=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\int \mathbf{x}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}\,dm\right).$$

بنابراین:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{v}_{F_1}\,dm=\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_2}\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm+(\mathbf{a}_0)_{F_1}\int dm+2\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{v}_{F_2}\,dm$$
$$+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\int \mathbf{x}\,dm+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}\,dm\right). \qquad (۷-۳۷)$$

حال، اگر F_1 یک چهارچوب لَخت[۱۹] باشد، اصل اندازه حرکت چنین نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_1}\int \mathbf{v}_{F_1}\,dm=\int \mathbf{t}\,dS+\int \rho\mathbf{B}\,dV. \qquad (۷-۳۸)$$

با استفاده‌از معادله (۷-۳۷)، اصل اندازه حرکت [معادله (۷-۳۸)] خواهدشد:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{F_2}\int_{V_m} \mathbf{v}_{F_2}dm=\int_{S_c}\mathbf{t}dS+\int_{V_c}\rho\mathbf{B}dV+\left[-m\mathbf{a}_0-2\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{v}_{F_2}dm-\dot{\boldsymbol{\omega}}\right. \qquad (۷-۳۹)$$
$$\left.\times\int \mathbf{x}dm-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\int \mathbf{x}dm)\right],$$

که $m=\int dm$

معادله (۷-۳۹) نشان‌می‌دهد که در صورت استفاده از یک چهارچوب متحرک، برای محاسبه

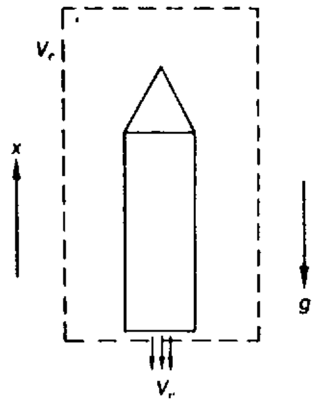
19. Inertial Frame

اندازه حرکت و نرخ زمانی آن، همان اصل اندازه حرکت، برای یک چهارچوب لخت را می‌توان به کار گرفت با این شرط که مؤلفه‌های نیروی سطحی و حجمی را به مؤلفه‌های داده‌شده در داخل کروشه ـ در طرف راست معادله (۷ ـ ۳۹) ـ اضافه کنیم. بنابراین، اگر یک حجم کنترل متحرک (و صلب) را به صورت یک چهارچوب متحرک در نظر بگیریم، آن‌گاه باید مؤلفه‌های نیرو را به تناسب اصلاح کنیم. به‌خصوص، اگر حجم کنترل، فقط دارای حرکت انتقالی (نه دورانی) با شتاب مطلق $\mathbf{a}_0$ باشد. اگر $\mathbf{v}$ و $\partial/\partial t$ به‌ترتیب نمایشگر سرعت‌نسبی و نرخ نسبی زمانی باشند، داریم:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v})\, dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = \int_{S_c} \mathbf{t}\, dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{B}\, dV - m\mathbf{a}_0. \qquad (۷-۴۰)$$

مثال ۷-۱۰

یک موشک[20] با جرم‌اولیه M_0 به طرف بالا (درحالی که یک جت از گازها را به‌نرخ γ slug/sec دفع می‌کند) در حال حرکت است. سرعت خروجی جت نسبت به موشک، v_e و فشار فشارسنج (در جت به مساحت A) برابر p است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت موشک را استخراج کنید و سرعت را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. از نیروهای بازدارنده[21] صرف‌نظر کنید.



شکل ۷-۷

20- rocket

21- Drag forces

حل: اگر V_c یک حجم کنترل باشد که با موشک به طرف بالا حرکت کند نسبت به V_c، مقدار حرکت خالص خروجی، برابر γv_e- می‌باشد. حرکت گازها ناشی از احتراق داخلی، هیچ‌گونه تغییر اندازه حرکت محضی نسبت به موشک ایجاد نمی‌کند، بنابراین، هیچ گونه نرخ تغییر اندازه حرکتی داخل حجم کنترل (متحرک) وجود ندارد. نیروی سطحی خالص - روی حجم کنترل - عبارت است از یک نیروی به سمت بالا و به مقدار pA. نیروی حجمی برابر $(M_0-\gamma t)g$ و به‌طرف پایین می‌باشد. به هر حال، چون حجم کنترل با خود موشک با شتاب $\ddot{x}$ در حال حرکت است، مؤلفه $-\ddot{x}(M-\gamma t)$ به مؤلفه‌های دیگر نیرو افزوده می‌شود [معادله (۷-۴۰) را ببینید]. بنابراین داریم:

$$-\gamma v_e = pA - (M_0 - \gamma t)g - (M_0 - \gamma t)\ddot{x},$$

یعنی:

$$(M_0 - \gamma t)\ddot{x} = \gamma v_e + pA - (M_0 - \gamma t)g.$$

این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$d\dot{x} = \frac{\gamma v_e + pA}{M_0 - \gamma t}\,dt - g\,dt.$$

اگر در $t=0$، $\dot{x}=0$ آن گاه:

$$\dot{x} = \frac{(\gamma v_e + pA)}{\gamma} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \gamma t}\right) - gt.$$

۷-۷- اصل ممان اندازه حرکت [22]

اصل کلی ممان اندازه حرکت [23] بیان می‌کند که کل ممان نیروهای سطحی و حجمی روی یک بخش ثابت از ماده - حول یک نقطه ثابت - برابر نرخ زمانی تغییر کل ممان اندازه حرکت آن بخش - حول همان نقطه - می‌باشد. یعنی:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}\, dV = \int_{S_c} \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, dS + \int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{B}\, dV, \qquad (۷-۴۱)$$

که $\mathbf{x}$ بردار موقعیت برای یک ذره نمونه می‌باشد. حال، چون

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}\, dV = \int_{V_m = V_c} \left\{\mathbf{v} \times \rho \mathbf{v}\, dV + \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\rho\, dV\right\} \qquad (۷-۴۲)$$

$$= \int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\, dV,$$

۲۲. فرض می‌شود که تمام گشتاورها Torques ممان نیرو بوده و اثر سطحی Traction ساده است.

23- global principle of moment of momentum

بنابراین، با استفاده از معادله (۷-۴۲) و با تبدیل انتگرال سطح، در طرف راست معادله (۷-۴۱) [مثال ۷-۳، معادله (۷-۷) را ببینید]، به دست می‌آید:

$$\int_{V_c} \mathbf{x} \times \left\{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{B}\right\} dV - 2 \int_{V_c} \mathbf{t}^A dV = 0, \tag{۴۳-۷}$$

که در آن $\mathbf{t}^A$ بردار بخش پادمتقارن تانسور تنش $\mathbf{T}$ می‌باشد. حال، نخستین مؤلفه معادله (۷-۴۳) به‌علت معادله (۷-۲۵) حذف می‌شود. بنابراین $\mathbf{t}^A=0$ و بخش متقارن تانسور تنش

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \tag{۴۴-۷}$$

مجدداً به دست می‌آید.

این به عنوان تمرین بر عهده دانشجویان گذاشته می‌شود تا از $(D/Dt)\int \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV$، **قضیه انتقال رینولدرز برای ممان**[24] را به دست آورند. با استفاده از این قضیه، اصل ممان اندازه حرکت [معادله (۷-۴۳)]، به شکل معادله موازنهٔ زیر خواهدشد:

کل ممان حول یک نقطه ثابت (ناشی از نیروهای سطحی و حجمی روی ماده‌ای که به طور لحظه‌ای در داخل یک حجم کنترل قرار دارد) = کل نرخ تغییر ممان اندازه حرکت داخل حجم کنترل + کل نرخ ممان اندازه حرکت خالص خروجی (۷-۴۵) از طریق سطح کنترل. علاوه بر این، اگر یک حجم کنترل متحرک به کار گرفته شود، مؤلفه‌های زیر باید به طرف چپ معادله (۷-۴۵) افزوده شود:

$$-\left(\int \mathbf{x}\, dm\right) \times \mathbf{a}_0 - \int \mathbf{x} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}) dm - \int \mathbf{x} \times \{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\} \mathrm{dm} - 2 \int \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) dm, \tag{۴۶-۷}$$

که ω و $\dot{\omega}$ سرعت و شتاب زاویه‌ای مطلق حجم کنترل می‌باشند، بردار $\mathbf{x}$ (از dm) از نقطه O انتخاب‌شدهٔ اختیاری O در حجم کنترل اندازه‌گیری می‌شود، $\mathbf{a}_0$ شتاب مطلق نقطه O و $\mathbf{v}$ سرعت (dm) نسبت به حجم کنترل می‌باشند.

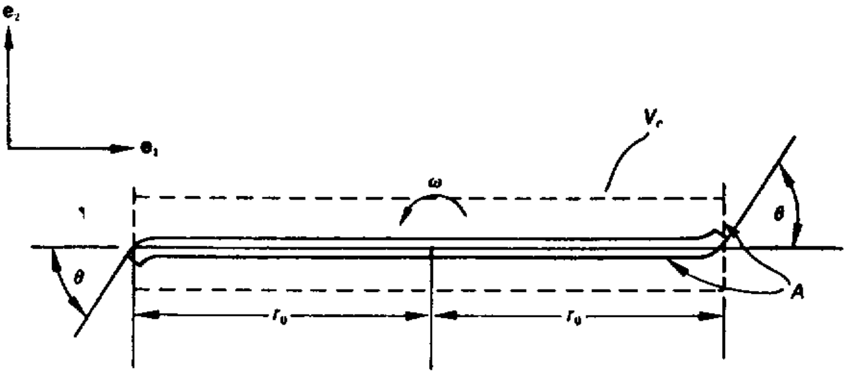
مثال ۷-۱۱

هر بازوی آب‌پاش در شکل ۷-۸ حجم ثابت آب، Q، را تخلیه و آزادانه حول محور مرکزی دوران می‌نماید. سرعت

24- Reynolds transport theorem for moment of momenta

دورانی ثابت آب‌پاش را محاسبه کنید.

حل: اگر V_c یک حجم کنترل باشد که با بازوهای آب‌پاش دوران کند، سرعت ذرات آب نسبت به آب‌پاش، برابر $(Q/A)\mathbf{e}_1$ در بازوی راست و برابر $(Q/A)(-\mathbf{e}_1)$ در بازوی چپ می‌باشد. اگر ρ چگالی باشد، آن‌گاه کل ممان اندازه حرکت خالص حول نقطه O، برابر $2\rho Q(Q/A)\ \bar{e}_1\ \mathrm{Sin}\theta r_0$ است. ممان اندازه حرکت حول O، ناشی از وزن، صفر است، و با فرض این که فشار در جت آب، همسان با فشار جو بوده و به عنوان فشار صفر فشارسنج گرفته شود، هیچ گونه



شکل ۷-۸

اثری ناشی از نیروی سطحی، روی حجم کنترل وجود ندارد. حال، چون حجم کنترل با آب‌پاش دوران می‌کند، نیاز داریم تا مؤلفه‌های موجود در معادله (۷-۴۶) را به ممان نیروها بیفزاییم. به هر حال، اگر $\mathbf{x}$ از O اندازه‌گیری شود، تنها مؤلفه غیرصفر عبارت است از:

$$-2\int \mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})\,dm,$$

که ممان ناشی از نیروهای کوریولیس[25] می‌باشد. حال، برای بازوی راست، $\mathbf{v}=(Q/A)\mathbf{e}_1$، پس:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\omega\mathbf{e}_3\times\frac{Q}{A}\mathbf{e}_1=\frac{\omega Q}{A}\mathbf{e}_2$$

و:

$$\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})=x\mathbf{e}_1\times\frac{\omega Q}{A}\mathbf{e}_2=\frac{x\omega Q}{A}\mathbf{e}_3.$$

بنابراین، مشارکت سیال در بازوی راست - در انتگرال - عبارت است از:

$$-\frac{2\omega Q}{A}\mathbf{e}_3\int_0^{r_0}x(\rho A\,dx)=-\omega Q\rho r_0^2\mathbf{e}_3.$$

25- Coriolis forces

با انضمام مشارکت فوق به بازوی چپ، انتگرال دارای مقدار $-2\omega Q\rho r_0^2\mathbf{e}_3$ خواهدبود.

بنابراین، از اصل ممان اندازه حرکت، برای یک حجم کنترل متحرک، داریم:

$$2\rho Q\left(\frac{Q}{A}\right)\sin\theta r_0=-2\omega Q\rho r_0^2.$$

که در آن:

$$\omega=-\frac{Q}{A}\frac{\sin\theta}{r_0}.$$

۷-۸- اصل بقای انرژی

اصل بقای انرژی[۲۶] بیان می‌کند که نرخ تغییر انرژی جنبشی و انرژی داخلی - برای بخش ثابت از ماده - برابر است با مجموع نرخ کار انجام‌شده توسط نیروهای سطحی و حجمی و انرژی حرارتی وارده به سطح مرزی[۲۷]. یعنی، اگر v^2 نمایشگر $\mathbf{v}.\mathbf{v}$، u انرژی داخلی بر واحد جرم، و $\mathbf{q}$ نرخ بردار سیلان حرارتی از طریق یک سطح با مساحت واحد باشند، آن‌گاه اصل بیان می‌کند:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m}\left(\rho\frac{v^2}{2}+\rho u\right)dV=\int_{S_c}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS+\int_{S_c}\rho\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\,dV-\int_{S_c}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS, \qquad (۷-۴۷)$$

علامت منفی در آخرین جمله، به‌خاطر این قرار است که $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ عمود به طرف خارج می‌باشد. مجدداً، چون $(D/Dt)\ (\rho dV)=0$، لذا:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m}\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=\int_{V_c}\left\{\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right\}\rho\,dV. \qquad (۷-۴۸)$$

با استفاده از معادله (۷-۴۸) و تبدیل انتگرالهای سطح در سمت راست معادله (۷-۴۷) [مثال ۷-۴، معادله (۷-۸) را ببینید]، داریم:

$$\int_{V_c}\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=\int_{V_c}\{(\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}+\operatorname{tr}(\mathbf{T}^T\nabla\mathbf{v})-\operatorname{div}\mathbf{q}\}dV. \qquad (۷-۴۹)$$

چون $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$ و:

$$(\operatorname{div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}=\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\rho\frac{Dv^2}{Dt}.$$

26- The principle of conservation of energy

۲۷. اگر انرژیهای دیگر، وارد مرز شوند و یا منابع انرژی وجود داشته‌باشد، باید آنها را به‌طرف راست معادله (۷-۴۷) افزود.

معادله (۷ـ ۴۹) می‌شود:

$$\int_{V_c} \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_{V_c} \{\mathrm{tr}\,(\mathbf{T}\nabla\mathbf{v}) - \mathrm{div}\,\mathbf{q}\} dV. \qquad (۵۰-۷)$$

پس در هر نقطه، داریم:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}\nabla\mathbf{v}) - \mathrm{div}\,\mathbf{q}. \qquad (۵۱-۷)$$

که، معادلهٔ انرژی است. یک شکل تاحدودی متفاوت از معادله (۷ـ ۵۱) را (با توجه به $\nabla\mathbf{v}=\mathbf{D}+\mathbf{W}$) می‌توان به دست آورد (که $\mathbf{D}$ بخش متقارن $\nabla\mathbf{v}$ ـ تانسور نرخ تغییر شکل ـ و $\mathbf{W}$، بخش پادمتقارن $\nabla\mathbf{v}$ ـ تانسور چرخش ـ می‌باشد):

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{T}\nabla\mathbf{v}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{TD}+\mathbf{TW}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{TD}) + \mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}). \qquad (۵۲-۷)$$

اما $\mathrm{tr}(\mathbf{TW}) = T_{ij}W_{ji} = T_{ji}W_{ij} = T_{ij}(-W_{ji}) = -T_{ij}W_{ji}$ به طوری که:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{TW}) = 0, \qquad (۵۳-۷)$$

بنابراین، دوباره معادله‌انرژی را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{TD}) - \mathrm{div}\,\mathbf{q}. \qquad (۵۴-۷)$$

مجدداً، اصل کلی بقای انرژی را می‌توان به شکل معادله موازنه زیر بیان داشت:

نرخ زمانی کار انجام‌شده (توسط نیروهای سطحی و حجمی در یک حجم کنترل) + نرخ حرارت ورودی = کل نرخ افزایش انرژی داخلی و جنبشی ماده داخل حجم کنترل + نرخ انرژی داخلی و جنبشی خارج‌شده از طریق سطح کنترل

(۵۵-۷)

مثال ۷-۱۲

به جریانی یک‌بعدی ـ در یک مجرای[28] ایزوله‌شده ـ یک شوک[29] عمودی فشاری وارد می‌شود. با فرض گاز ایده آل،

28- Duct

29- Shock

فشار بعد از شوک را برحسب فشار و سرعت قبل از شوک بیابید.

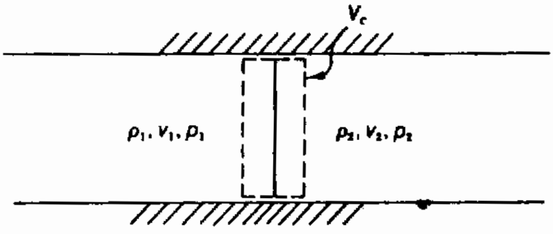
حل: برای حجم کنترل نشان داده‌شده و برای جریان پایدار، داریم:

(۱) شار خروجی جرم = شار ورودی جرم[۳۰]، یعنی:

$$\rho_1 A v_1 = \rho_2 A v_2.$$

یعنی

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2. \qquad \text{(I)}$$



شکل ۷-۹

(۲) شار خروجی اندازه حرکت خالص در جهت x = نیرو در جهت x

$$p_1 A - p_2 A = (\rho_2 A v_2) v_2 - (\rho_1 A v_1) v_1$$

یعنی

$$(p_1 - p_2) = \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2. \qquad \text{(II)}$$

(۳) شار خروجی انرژی خالص (داخلی و جنبشی) = نرخ کار انجام‌شده توسط نیروی سطحی.

یعنی:

$$p_1 A v_1 - p_2 A v_2 = [(\rho_2 A v_2) u_2 - (\rho_1 A v_1) u_1] + [\tfrac{1}{2}(\rho_2 A v_2) v_2^2 - \tfrac{1}{2}(\rho_1 A v_1) v_1^2]. \qquad \text{(III)}$$

برای گاز ایده‌آل انرژی داخلی بر واحد جرم توسط رابطه زیر داده‌می‌شود

$$u = \frac{p}{\rho}\left(\frac{1}{\gamma - 1}\right),$$

که $\theta = c_p/c_v$ نسبت حرارت مخصوص می‌باشد. بنابراین معادله (III) می‌شود:

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = p_2 v_2 \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right) - p_1 v_1 \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right) + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^3 - \frac{1}{2}\rho_1 v_1^3$$

---

۳۰. نرخ جریان از طریق یک سطح = شار Flux.

یا

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}p_1v_1+\frac{1}{2}\rho_1v_1^3=\frac{\gamma}{\gamma-1}p_2v_2+\frac{1}{2}\rho_2v_2^3.$$

یعنی:

$$\rho_1v_1\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2\right]=\rho_2v_2\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}v_2^2\right].$$

با توجه به معادله (I)، این معادله می‌شود:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}v_2^2. \tag{IV}$$

توجه کنید که این، نظیر معادله انرژی از فصل ۶ (مثال ۶-۲۰) است که با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادله انرژی - برای سیال غیرچسبنده و بدون انتقال حرارت - استخراج شد.

از معادلات (I)، (II)، و (III) به دست می‌آید:

$$p_2=\frac{1}{\gamma+1}\{2\rho_1v_1^2-(\gamma-1)p_1\}.$$

مسائل:

۷-۱ - با در نظر گرفتن ناحیه مقید $x=0$، $x=2$، $y=0$، $y=2$، $z=0$، $z=2$، قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\mathbf{v}=2x\mathbf{e}_1+z\mathbf{e}_2$ اثبات کنید.

۷-۲ - نشان دهید که

$$\int_S \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\,dS=3V,$$

که در آن V حجم محدودشده توسط مرز S می‌باشد.

۷-۳ - (الف) میدان برداری $\mathbf{v}=\phi\mathbf{a}$ را در نظر بگیرید که ϕ یک میدان عددی و $\bar{\mathbf{a}}$ یک بردار اختیاری ثابت (مستقل از موقعیت) می‌باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس ثابت کنید که

$$\int_V \nabla\phi\,dV=\int_S \phi\,\mathbf{n}\,dS.$$

(ب) برای هر سطح بسته S نشان دهید که $\int_S \mathbf{n}\,dS=0$

۷-۴ - میدان تنش $\mathbf{T}$ در تعادل با نیروی حجم $\rho\mathbf{B}$ می‌باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس، برای حجم V و سطح مرزی S، نشان دهید که

$$\int_S \mathbf{t}\,dS+\int_V \rho\mathbf{B}\,dV=0.$$

یعنی، کل برآیند نیرو برابر صفر است.

۷-۵- (الف) اگر $\mathbf{u}^*$ یک میدان کرنش $\mathbf{E}^*=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^*+(\nabla\mathbf{u}^*)^T)$ را تعریف کند و اگر $\mathbf{T}^{**}$ در تعادل با یک نیروی حجمی $\rho\mathbf{B}^{**}$ و اثر سطحی $\mathbf{t}^{**}$ باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس، اتحاد زیر را (قضیه کار مجازی [۳۱]) اثبات کنید.

$$\int_S \mathbf{t}^{**}\cdot\mathbf{u}^*\,dS+\int_V \rho\mathbf{B}^{**}\cdot\mathbf{u}^*\,dV=\int_V T_{ij}^{**}E_{ij}^*\,dV.$$

(ب) اگر $\mathbf{u}^*=x_1\ \bar{\mathbf{e}}_1$ و $\mathbf{T}^{**}$ در تعادل با نیروی حجمی صفر (و اثر سطحی صفر روی یک مرز مشخص) باشد. با استفاده از اتحاد بند (الف)، نشان دهید که:

$$\int_V T_{11}^{**}\,dV=0.$$

۷-٦- (الف) با استفاده از معادلات حرکت و قضیه دیورژانس، اتحاد نرخ کار زیر را اثبات کنید.

$$\int_V \rho\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\,dV+\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS=\int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dV+\int_V T_{ij}D_{ij}\,dV.$$

(ب) اگر ماده صلب باشد، اتحاد بند (الف) چگونه تغییر می‌کند؟

۷-۷- میدانهای سرعت و چگالی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1 \qquad \text{و} \qquad \rho=\rho_0 e^{-t}.$$

(الف) معادله بقای جرم را بررسی کنید.

(ب) جرم و نرخ افزایش جرم در حجم کنترل استوانه‌ای (به سطح مقطع A و محدود به $x_1=0$ و $x_1=3$) را محاسبه کنید.

(پ) سیلان ورودی جرم به داخل حجم کنترل بند (ب) را محاسبه نمایید. آیا سیلان جرم ورودی برابر نرخ افزایش جرم است؟

۷-۸- (الف) بررسی کنید که آیا حرکت:

$$x_1=X_1e^{t-t_0},\quad x_2=X_2,\quad x_3=X_3$$

متناظر با میدان سرعت مسالهٔ قبل است؟

(ب) برای میدان چگالی $\rho=\rho_0e^{-(t-t_0)}$، ثابت کنید که جرم موجود (در حجم ماده‌ای که منطبق بر حجم

31- Virtual work

کنترل مساله ۷-۷ در زمان t است) ثابت باقی می‌ماند.

(پ) کل اندازه حرکت خطی، برای حجم ماده بند (الف) را محاسبه کنید. چرا در این حالت (در مقایسه با مثال ۷-۶) ثابت نیست؟

۹-۷ – مثال ۷-۷ را برای میدان سرعت $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1$ و میدان چگالی $\rho=\rho_0 x_1$ و حجم کنترل استوانه‌ای مقید به $x_1=1$ و $x_1=3$، انجام دهید.

۱۰-۷ – مرکز جرم $\mathbf{x}_{\text{c.m.}}$ حجم ماده، توسط معادله زیر تعریف می‌شود

$$m = \int_{V_m} \rho \, dV \quad \text{که} \qquad m\mathbf{x}_{\text{c.m.}} = \int_{V_m} \mathbf{x}\rho \, dV$$

نشان دهید که اصل اندازه حرکت خطی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a}_{\text{c.m.}} = \frac{D^2}{Dt^2}\mathbf{x}_{\text{c.m.}} \quad \text{که} \qquad \int_{S_c} \mathbf{t} \, dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{B} \, dV = m \, \mathbf{a}_{\text{c.m.}}$$

شتاب مرکز جرم است.

۱۱-۷ – میدان سرعت و میدان چگالی مثال ۷-۶ را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x_1}{1+t}\right)\mathbf{e}_1, \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1+t},$$

(الف) کل اندازه حرکت خطی و نرخ افزایش اندازه حرکت خطی در یک حجم کنترل استوانه‌ای (به مساحت سطح مقطع A و محدود به صفحات $x_1=1$ و $x_1=3$) را محاسبه کنید.

(ب) نرخ خالص سیلان خروجی اندازه حرکت خروجی از حجم کنترل بند (الف) را به دست آورید.

(پ) کل نیروی وارده به ماده موجود در حجم کنترل را محاسبه نمایید.

(ت) انرژی جنبشی کل و نرخ افزایش انرژی جنبشی را برای حجم کنترل بند (الف) محاسبه کنید.

(ث) نرخ شار خروجی خالص انرژی جنبشی را از حجم کنترل به دست آورید.

۱۲-۷ – میدانهای سرعت و چگالی مساله ۷-۷ را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1, \quad \rho = \rho_0 e^{-t}.$$

برای یک زمان اختیاری t، ماده موجود در حجم کنترل استوانه‌ای و محدود به $x_1=0$ و $x_1=3$ را در نظر بگیرید.

(الف) اندازه حرکت خطی و نرخ افزایش آن در این حجم کنترل را به دست آورید.

(ب) شار خروجی اندازه حرکت خطی را محاسبه کنید.

(پ) برآیند نیروی خالص (که روی ماده موجود در حجم کنترل وارد می‌شود) را بیابید.

۷-۱۳ - مساله قبل را برای همان میدان سرعت، اما با $\rho=\rho_0/x_1$ و حجم کنترل استوانه‌ای محدود به $x_1=1$ و $x_1=3$، انجام دهید.

۷-۱۴ - میدان جریان $\mathbf{v}=x\mathbf{e}_1-y\mathbf{e}_2$ با ثابت = ρ را در نظر بگیرید. برای یک حجم کنترل تعریف‌شده توسط $x=0$، $x=2$، $y=0$، $y=2$، $z=0$، $z=2$، برآیند نیرو و گشتاور خالص (که روی ماده موجود در این حجم وارد می‌شود) را محاسبه نمایید.

۷-۱۵ - مساله قبل را برای حجم کنترل تعریف‌شده توسط $x=2$، $y=2$، $xy=0$، $z=0$، $z=2$ حل نمایید.

۷-۱۶ - برای جریان هاگن - پوسوله در یک لوله:

$$\mathbf{v} = C\,(r_0^2 - r^2)\mathbf{e}_1,$$

شار اندازه حرکت از طریق سطح مقطع را محاسبه کنید. اگر سرعت یکنواخت فرض شود، برای همان نرخ جریان، شار اندازه حرکت از طریق سطح مقطع چیست؟ دو نتیجه را با یکدیگر مقایسه کنید.

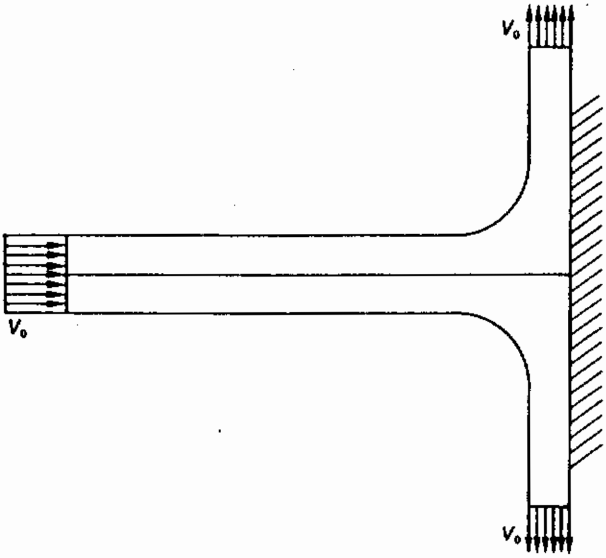
۷-۱۷ - توده‌ای از زنجیر، روی میزی - از طریق سوراخی از میز - تحت اثر جاذبه، به پایین می‌غلطد، نشان دهید که طول آویز x معادله زیر را ارضا می‌کند.

$$gx = x\ddot{x} + (\dot{x})^2 = \frac{d}{dt}(x\dot{x}).$$

۷-۱۸ - یک جت آب به قطر ۵ cm با سرعت ۱۲ m/sec حرکت می‌کند و بر روی یک تیغه خمیده (که آن را ۶۰ درجه از جهت خود منحرف می‌کند) برخورد می‌نماید. از وزن صرف نظر کنید و نیروی وارده - توسط مایع - روی تیغه را به دست آورید.

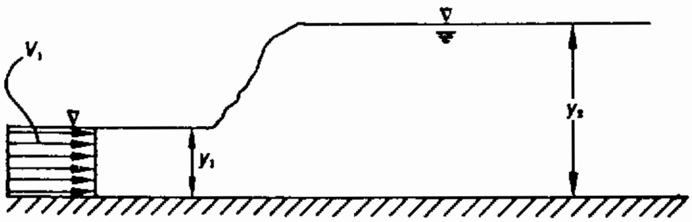
۷-۱۹ - یک خط لوله افقی به قطر ۱۰ cm، ۹۰ درجه خم می‌شود، و در خلال خم‌شدن، قطر آن به ۵ cm تغییر می‌یابد. فشار در لوله (۱۰ cm) برابر ۱۴۰ Kpa می‌باشد. برآیند نیرو روی خم لوله را هنگامی که $0.05 m^3/sec$ از آب در خط لوله جاری می‌شود، تخمین بزنید.

۷-۲۰ - شکل م ۷ - ۱ یک جت آب پایدار به مساحت A را نشان می‌دهد که بر روی دیواره مسطحی برخورد می‌کند. نیروی وارده به دیوار را بیابید. از وزن و چسبندگی آب صرف نظر کنید.



شکل م ۷-۱

۷-۲۱ - در جریان کانال روباز، اغلب، وقتی آب - در سرعت بالا - به داخل ناحیه‌ای با سرعت پایینتر تخلیه شود، یک انقطاع در سطح آب اتفاق می‌افتد و به عنوان «پرش هیدرولیکی»[۳۲] شناخته می‌شود. با مراجعه به شکل م ۷-۲، اگر نرخ جریان، Q بر واحد عرض باشد، رابطه بین y_1 و y_2 را بیابید. فرض کنید که جریان - قبل و بعد از پرش - یکنواخت و توزیع فشار به شکل هیدرواستاتیک است.



شکل م ۷-۲

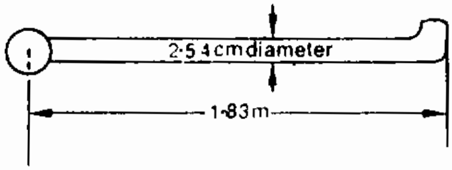
۷-۲۲ - اگر تیغه خمیده مثال ۷-۸ با سرعت $v < v_0$ در همان جهت جت ورودی حرکت کند، برآیند

32- Hydraulic jump

نیروی وارده روی تیغه ـ توسط جت ـ را به دست آورید.

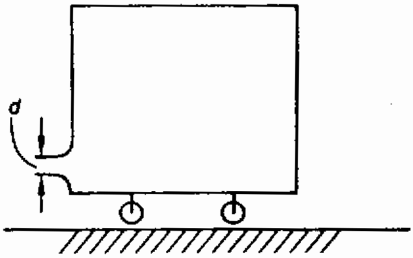
۷-۲۳- اصل ممان اندازه حرکت معادله (۷ ـ ۴۵) را به صورت توصیفی بنویسید.

۷-۲۴- برای آب‌پاش با یک بازو (نشان داده‌شده در شکل م ۷ ـ ۳) اگر $Q=0.566\text{m}^3/\text{sec}$ باشد، سرعت زاویه‌ای را بیابید. از اصطکاک صرف نظر کنید.



شکل م ۷-۳

۷-۲۵- یک واگن آب (نشان داده‌شده در شکل م ۷ ـ ۴) حاوی آب و هوای فشرده است که موجب تنظیم خروج اجباری جت آب از نازل، با نرخ $Q=\text{m}^3/\text{sec}$ می‌شود. قطر جت آب $d\text{cm}$ و کل جرم اولیه واگن M_0 می‌باشد. با صرف نظر از نیروهای اصطکاک، سرعت واگن را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.



شکل م ۷-۴

۷-۲۶- معادله انرژی [معادله (۷ ـ ۵۵)] را به صورت توضیحی بنویسید.

فصل ۸

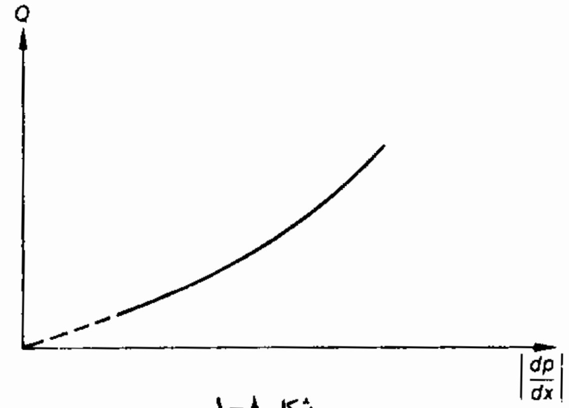
سیال ساده تراکم‌ناپذیر

در فصل ٦، سیال چسبنده خطی (به عنوان نمونه‌ای از یک معادله بنیادین از یک سیال ایده‌آل) مورد بحث قرار گرفت. به نظر می‌رسد که رفتار مکانیکی بسیاری از سیالات واقعی را بتوان به نحو قابل قبولی، تحت شرایط و مقتضیات این معادله بنیادین توصیف، نمود. از این معادله، اغلب به عنوان معادله بنیادین یک سیال نیوتنی یاد می‌شود. تعدادی از سیالات واقعی، رفتاری را از خود نشان می‌دهند که توسط تئوری سیال نیوتنی قابل تبیین نیست. مثالهایی از این دست عبارت‌اند از: حلالهای پلی‌مری، رنگها، شیره‌های قند وغیره.

برای یک جریان لایه‌لایه یا آرام یک‌جهته و پایدار آب، در یک لوله مدور، تئوری سیال نیوتنی نتیجه‌ای ـ در توافق با مشاهدات تجربی ـ به دست می‌دهد که نخستین بار توسط هاگن و پوسوله مطرح شد. بنابراین تئوری، حجم تخلیه Q، باگرادیان فشار (ثابت) در جهت محوری و نیز با توان چهارم قطر d لوله متناسب می‌باشد، یعنی [معادله (٦ ـ ٢٧) را ببینید]:

$$Q = \frac{\rho\pi d^4}{128\mu}\left|\frac{dp}{dx}\right| .$$

به هر حال، مشاهده شده‌است که برای محلولهای بالای پلی‌مری، معادله فوق صادق نیست. چنان چه d ثابت باشد، رابطه Q ، در برابر $|dp/dx|$ غیرخطی است (نظیر آن‌چه که در شکل ۸ ـ ۱ نشان دادهَ شده‌است).



شکل ۸-۱

برای جریان آرام و پایدار آب که بین دو استوانه هم‌محور بسیار طویل (به شعاعهای r_1 و r_2) قرار گرفته‌است، اگر یکی از استوانه‌ها ساکن و دیگری با سرعت زاویه Ω در حال دوران باشد، تئوری سیال نیوتنی، نتایجی سازگار با مشاهدات تجربی ارائه می‌کند، بدین معنی که: گشتاور بر واحد ارتفاع (که باید به استوانه برای برقرار سیلان اعمال شود) متناسب با Ω می‌باشد. در حقیقت [معادله (۶ - ۳۰) را ببینید]:

$$M = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 \Omega}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad \text{(ب)}$$

به هر حال، آشکار شده که برای آن دسته از سیالاتی که از معادله (۶ - ۲۷) تبعیت می‌کنند، از معادله (۶ - ۳۰) نیز پیروی خواهندکرد.

علاوه بر این، برای ماده‌ای نظیر آب - در جریان پایدار کوئت - تنش عمودی در استوانه بیرونی، همواره بزرگتر از تنش در استوانه داخلی است و تفاوت، به علت نیروهای گریز از مرکز می‌باشد. اما، برای سیالی که از معادله (الف) تبعیت نمی‌کند، تنش عمودی فشاری در استوانه داخلی، می‌تواند بزرگتر از تنش در استوانه بیرونی باشد.

در این فصل، پیرامون طبقه‌ای از جریانها به بحث خواهیم پرداخت که به عنوان جریانهای ویسکومتریک[1] مشهورند و ایده‌آل شدهٔ ماده‌ای هستند که به عنوان سیال ساده شناخته می‌شوند (و قادر به نمایش بسیاری از رفتارهایی که در سیالات حقیقی متعدد مشاهده شده‌است، می‌باشند). این فصل را با

1- Viscometric flows

توضیح بیشتری از سینماتیک تغییر شکل (که بعداً مورد نیاز است) آغاز می‌کنیم.

۸-۱- هیات جاری، به عنوان هیات مرجع

اگر $\mathbf{x}$ بردار موقعیت یک ذره در زمان t باشد و ξ بردار موقعیت همان ذره در زمانی مانند τ، معادله

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \qquad \text{با} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \tag{۸-۱}$$

معرف حرکت یک محیط پیوسته خواهدبود که در آن، از زمان جاری به عنوان زمان مرجع استفاده شده‌است.

برای یک میدان سرعت داده‌شده $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$، سرعت، در موقعیت ξ و در زمان τ برابر $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\xi,\tau)$ است. به عبارت دیگر، برای یک ذره به خصوص (یعنی برای $\mathbf{x}$ و t ثابت)، سرعت در زمان τ توسط $(\partial\xi/\partial\tau)_{\text{fixed}\,\mathbf{x},t}$ داده می‌شود.

بنابراین:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \tau} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau). \tag{۸-۲}$$

مثال ۸-۱

میدان سرعت یک جریان یک‌جهته و پایدار داده شده‌است:

$$v_1 = v(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

با استفاده از زمان جاری tـ به عنوان زمان مرجع ـ حرکت ذرات را توصیف کنید.

حل: از میدان سرعت داده‌شده، برای مولفه‌های سرعت در موقعیت (ξ_1,ξ_2,ξ_3) و در زمان τ داریم:

$$v_1 = v(\xi_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

بنابراین، با $\xi=\xi_i\mathbf{e}_i$، معادله (۸-۲) می‌دهد:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = v(\xi_2), \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \tau} = 0.$$

از $\partial\xi_2/\partial\tau=0$، داریم:

$$\xi_2 = f(x_1, x_2, x_3, t).$$

اما در $\tau=t$، $\xi_2=x_2$. بنابراین:

$$\xi_2 = x_2 \qquad \text{برای تمامی } \tau$$

به‌طور مشابه:

$$\xi_3 = x_3 \qquad \text{برای تمامی } \tau$$

از $\partial\xi_1/\partial\tau = v(\xi_2)$، چون $\xi_2 = x_2$ برای تمامی T است، داریم:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = v(x_2),$$

به طوری که:

$$\xi_1 = v(x_2)\tau + g(x_1, x_2, x_3, t).$$

در $\tau = t$، $\xi_1 = x_1$، پس:

$$x_1 = v(x_2)t + g(x_1, x_2, x_3, t)$$

که از آن:

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 - v(x_2)t$$

و:

$$\xi_1 = v(x_2)\tau + x_1 - v(x_2)t.$$

یعنی:

$$\xi_1 = x_1 + v(x_2)(\tau - t),$$
$$\xi_2 = x_2,$$
$$\xi_3 = x_3.$$

۸-۲- تانسور تغییر شکل نسبی

فرض کنید که $d\mathbf{x}$ و $d\,\boldsymbol{\xi}$ بردارهایی (بی‌نهایت کوچک) باشند که به ترتیب، المان مادی مشابهی را در زمان t و τ نمایش دهند. بنابراین، $d\mathbf{x}$ و $d\,\boldsymbol{\xi}$ با رابطه زیر مرتبط می‌شوند:

$$d\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \tau) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) = (\nabla\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{x}. \qquad (۸-۳)$$

که در مختصات دکارتی:

$$[\nabla\boldsymbol{\xi}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \qquad (۸-۴)$$

تانسور $\nabla\xi$ به عنوان گرادیان تغییر شکل نسبی شناخته می‌شود. توجه کنید که برای $\tau=t$، $d\xi=\xi(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t)-\xi(\mathbf{x},t)=(\mathbf{x}+d\mathbf{x})-\mathbf{x}=d\mathbf{x}$m، بنابراین، $(\nabla\xi)_{\tau=t}=\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ تانسور واحد است).

دو المان $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ صادره از نقطه P در زمان t، و $d\xi^{(1)}$ و $d\xi^{(2)}$ المانهای متناظر در زمان τ را در نظر بگیرید. آن‌گاه:

$$d\boldsymbol{\xi}^{(1)}\cdot d\boldsymbol{\xi}^{(2)}=[(\nabla\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{x}^{(1)}]\cdot[(\nabla\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{x}^{(2)}]. \tag{۸-۵}$$

بنابراین، طبق تعریف برگردان:

$$d\boldsymbol{\xi}^{(1)}\cdot d\boldsymbol{\xi}^{(2)}=d\mathbf{x}^{(1)}\cdot(\nabla\boldsymbol{\xi})^T(\nabla\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{x}^{(2)}. \tag{۸-۶}$$

فرض کنید

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)\equiv(\nabla\boldsymbol{\xi})^T(\nabla\boldsymbol{\xi}), \tag{۸-۷}$$

پس

$$d\boldsymbol{\xi}^{(1)}\cdot d\boldsymbol{\xi}^{(2)}=d\mathbf{x}^{(1)}\cdot\mathbf{C}_t\,d\mathbf{x}^{(2)}. \tag{۸-۸}$$

اگر $\mathbf{C}_t=\mathbf{I}$، آن‌گاه $d\xi^{(1)}.d\xi^{(2)}=d\mathbf{x}^{(1)}.d\mathbf{x}^{(2)}$ و تغییر شکلی رخ نمی‌دهد. تانسور متقارن $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)$ تانسور تغییر شکل نسبی (یا تانسور کوشی ـ گرین نسبی) گفته می‌شود. توجه کنید که

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},t)=(\nabla\boldsymbol{\xi})^T_{\tau=t}(\nabla\boldsymbol{\xi})_{\tau=t}=\mathbf{I}.$$

مثال ۸-۲

تانسور تغییر شکل نسبی را برای میدان سرعت داده‌شده در مثال ۸-۱ بیابید.

حل: چون:

$$\xi_1=x_1+v(x_2)\,(\tau-t),\quad \xi_2=x_2,\quad \xi_3=x_3.$$

با $k\equiv dv/dx_2$، داریم:

$$[\nabla\boldsymbol{\xi}]=\begin{bmatrix}1 & k(\tau-t) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

رابطه $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)=(\nabla\xi)^T(\nabla\xi)$ می‌دهد:

$$[\mathbf{C}_t]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ k(\tau-t) & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k(\tau-t) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k(\tau-t) & 0\\ k(\tau-t) & k^2(\tau-t)^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

۸-۳- تانسور سابقه تغییر شکل. تانسورهای رولین ـ اریکسن

تانسور $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)$ تغییر شکل المانی را (در زمان τ) توصیف می‌کند که در زمان t در $\mathbf{x}$ بوده است. بنابراین، با تغییردادن τ از $\tau=-\infty$ تا $\tau=t$ در تابع $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)$، تمامی سابقه[۲] تغییر شکل (از زمان بی‌نهایت طولانی قبل تا زمان حاضر t) به دست می‌آید.

اگر فرض شود که قادر به بسط مولفه‌های $\mathbf{C}_t$ در سریهای تیلور حول $\tau=t$ باشیم، با توجه به $(\partial\mathbf{C}_t/\partial\tau)_{ij}\equiv(\partial/\partial\tau)(\mathbf{C}_t)_{ij}$، داریم:

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)=\mathbf{C}_t(\mathbf{x},t)+\left(\frac{\partial\mathbf{C}_t}{\partial\tau}\right)_{\tau=t}(\tau-t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{C}_t}{\partial\tau^2}\right)_{\tau=t}(\tau-t)^2+\dots$$

فرض کنید

$$\mathbf{A}_1=\left(\frac{\partial\mathbf{C}_t}{\partial\tau}\right)_{\tau=t},\qquad \mathbf{A}_2=\left(\frac{\partial^2\mathbf{C}_t}{\partial\tau^2}\right)_{\tau=t},\quad \text{وغیره} \tag{۸-۹}$$

داریم (توجه شود، $\mathbf{C}_t(\mathbf{x},t)=\mathbf{I}$):

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)=\mathbf{I}+(\tau-t)\mathbf{A}_1+\frac{(\tau-t)^2}{2}\mathbf{A}_2+\dots \tag{۸-۱۰}$$

تانسورهای $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$ و... و $\mathbf{A}_n$ به عنوان تانسورهای رولین ـ اریکسن[۳] شناخته می‌شوند.

از معادله فوق، دیده می‌شود که $\mathbf{A}_n$ها سابقه تغییر شکل نسبی را معین می‌کنند.

مثال ۸-۳

تانسور رولین ـ اریکسن را برای جریانهای تک‌جهته مثال ۸-۱ بیابید.

حل: از مثال ۸-۲ داریم:

$$[\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)]=\begin{bmatrix}1 & k(\tau-t) & 0\\ k(\tau-t) & 1+k^2(\tau-t)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&k&0\\k&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}(\tau-t)+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2k^2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{(\tau-t)^2}{2}.$$

2- History

3- Revlin - Ericksen tensors

بنابراین (معادله ۸-۱۰ را ببینید):

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_3] = [\mathbf{A}_4] = \ldots [\mathbf{A}_n] = 0 \qquad \text{برای تمامی } n \geq ۳$$

که $k=dv/dx_2$. توجه کنید که با استفاده از معادله ۸-۹ می‌توان نتایج مشابهی را مستقیماً به دست آورد.

مثال ۸-۴

مولفه‌های دکارتی یک میدان سرعت، با تقارن محوری داده شده‌است:

$$v_1 = v(r), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0 \qquad \text{که} \quad r^2 = x_2^2 + x_3^2$$

(الف) حرکت را با استفاده از زمان t به عنوان زمان مرجع بیابید.

(ب) تانسور تغییر شکل نسبی را محاسبه کنید.

(پ) تانسورهای رولین ـ اریکسن را پیدا کنید.

حل: (الف) فرض کنید ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 مولفه‌های دکارتی بردار موقعیت یک ذره $(\mathbf{x},t)$ در زمان τ باشند. با استفاده از مثال ۸-۱، به‌وضوح دیده می‌شود که چون $v_2=0$ و $v_3=0$، برای همه زمان τ داریم: $\xi_2 = x_2$

و:

$$\xi_3 = x_3.$$

بنابراین:

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = x_2^2 + x_3^2 = r^2.$$

حال:

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau}\right)_{x,\text{ and } t \text{ fixed}} = v(r'),$$

که: $r'^2=\xi_2^2+\xi_3^2=r^2$ (مستقل از τ). بنابراین

$$\xi_1 = v(r)\tau + f(x_1, x_2, x_3, t).$$

چون در $\tau=t$، $\xi_1=x_1$، داریم:

$$f = x_1 - v(r)t.$$

بنابراین:

$$\xi_1 = x_1 + v(r)(\tau - t),$$
$$\xi_2 = x_2,$$
$$\xi_3 = x_3.$$

(ب) چون:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = (\tau - t)\frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_2},$$

و:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = (\tau - t)\frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_3}, \text{etc.},$$

که:

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \cos\theta,$$

و:

$$\frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{x_3}{r} = \sin\theta,$$

پس با نمایش dv/dr توسط $k(r)$، داریم:

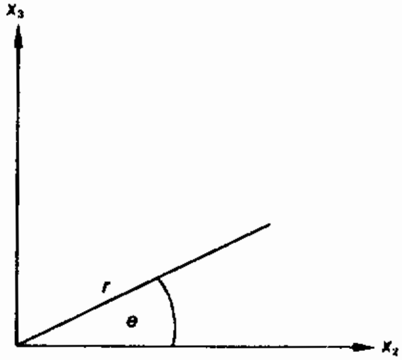
بنابراین:

$$[\nabla\xi] = \begin{bmatrix} 1 & (\tau - t)k(r)\cos\theta & (\tau - t)k(r)\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{C}_t] = [\nabla\xi]^T[\nabla\xi] = \begin{bmatrix} 1 & (\tau - t)k(r)\cos\theta & (\tau - t)k(r)\sin\theta \\ (\tau - t)k(r)\cos\theta & 1 + (\tau - t)^2k^2(r)\cos^2\theta & (\tau - t)^2k^2(r)\sin\theta\cos\theta \\ (\tau - t)k(r)\sin\theta & (\tau - t)^2k^2(r)\sin\theta\cos\theta & 1 + (\tau - t)^2k^2(r)\sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

(پ) از نتیجه بند (ب) داریم:

$$[\mathbf{C}_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k(r)\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}(\tau - t)$$
$$+ k^2(r)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}(\tau - t)^2.$$



شکل ۸-۲

بنابراین، نسبت به پایه‌های دکارتی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ تانسورهای رولین - اریکسن عبارت‌اند از (معادله ۸-۱۰ را ببینید):

$$[\mathbf{A}_1] = k(r)\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{A}_2] = 2k^2(r)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \cdots = \mathbf{A}_n = 0.$$

مثال ۸-۵

نشان دهید که:

(الف) $$\frac{D}{Dt}(ds^2) = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1 d\mathbf{x} \quad \text{و} \quad \frac{D^2}{Dt^2}(ds^2) = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_2 d\mathbf{x}\cdot$$

(ب) $$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{D\mathbf{A}_1}{Dt} + \mathbf{A}_1(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_1 .$$

حل: (الف) در هر زمان τ، داریم

$$ds^2 = d\boldsymbol{\xi}\cdot d\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{C}_t d\mathbf{x},$$

$$\left[\frac{D}{Dt}(ds^2)\right]_{\text{at time } t} = \left[\frac{\partial}{\partial\tau}(ds^2)\right]_{\substack{x_i\text{-fixed}\\ \tau=t}} = d\mathbf{x}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{C}_t}{\partial\tau}\right)d\mathbf{x} = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1 d\mathbf{x}.$$

به‌طور مشابه:

$$\left[\frac{D^2}{Dt^2}(ds^2)\right]_{\text{at time } t} = d\mathbf{x}\cdot\left(\frac{\partial^2\mathbf{C}_t}{\partial\tau^2}\right)_{\tau=t} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_2 d\mathbf{x}.$$

(ب) از فصل ۳، در زمان t داریم:

$$\frac{D}{Dt}(ds^2) = 2d\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}d\mathbf{x},$$

که $\mathbf{D}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T]$ تانسور نرخ تغییر شکل است. بنابراین:

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T.$$

سپس:

$$\frac{D^2}{Dt^2}(ds^2) = \left(\frac{D}{Dt}d\mathbf{x}\right)\cdot \mathbf{A}_1 d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot\frac{D}{Dt}\mathbf{A}_1 d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1\frac{D}{Dt}d\mathbf{x}.$$

اما:

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}$$ [معادله (۳-۲۰) را ببینید]

بنابراین:

$$\frac{D^2}{Dt^2}(ds^2) = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1 d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot\frac{D\mathbf{A}_1}{Dt}d\mathbf{x} + d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1(\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}.$$

از تعریف برگردان:

$$(\nabla\mathbf{v})d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1 d\mathbf{x} = d\mathbf{x}\cdot(\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_1 d\mathbf{x},$$

$$\frac{D^2}{Dt^2}(ds^2) = d\mathbf{x}\cdot\left[\frac{D\mathbf{A}_1}{Dt} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1(\nabla\mathbf{v})\right]d\mathbf{x}.$$

بنابراین [۴]:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{D\mathbf{A}_1}{Dt} + \mathbf{A}_1(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_1.$$

توجه کنید که در مختصات دکارتی:

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + v_m\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_m}$$

۸-۴- سیال ساده تراکم‌ناپذیر

یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر، یک ماده‌همسانگرد ایده‌آل با معادله بنیادین زیر می‌باشد:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}', \qquad (۸-۱۲)$$

که $\mathbf{T}'$ وابسته به سابقه‌های [۵] گذشته تا زمان جاری t، از تانسور تغییر شکل نسبی $\mathbf{C}_t$، و p یک فشار هیدرواستاتیک نامعین می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathbf{H}}}[\mathbf{C}_t(\mathbf{x},\tau)], \qquad (۸-۱۳)$$

---

۴. تذکر: باقی‌مانده تانسورهای رولین ـ اریکسن رابطه بازگشت Recursion relation را ارضا می‌کنند.

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{D}{Dt}\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_n.$$

5- Histories

$\overset{\tau=t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathbf{H}}}$ نشانگر آن است که مقادیر H وابسته به همه C_t از $C_t(x,-\infty)$ تا $C_t(x,t)$ هستند.

از بخش ۸-۳ دیده‌می‌شود که تحت این فرض (که بسط سریهای تیلور $C_t(x,t)$ صادق است[۶]) تانسور رولین ـ اریکسن $A_n(n=1,2,...,\infty)$ سابقه $C_t(x,\tau)$ را به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots), \qquad (۸\text{-}۱۴ \text{ الف})$$

که $\bar{A}_1=0$ (که حاصل معادله بقای جرم برای یک سیال تراکم‌ناپذیر است).[۷]

علاوه بر این، نیاز داریم که تابع f نتواند اختیاری باشد، بلکه رابطه زیر را ارضا کند:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)\mathbf{Q} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_2\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_n\mathbf{Q}) \qquad (۸\text{-}۱۴ \text{ ب})$$

برای هر تانسور متعامد Q.

معادله (۸-۱۴ ب) «همسانگردی ماده» را به عنوان بخشی از تعریف یک سیال ساده، محقق می‌سازد. می‌توان متذکر شد که بر طبق اصل بی‌تفاوتی چهارچوب مادی[۸] (تحت این فرض که f تنها وابسته به $\bar{A}_n$ها است) تنها شکل مجاز f آن است که معادله (۸-۱۴ ب) را ارضا نماید.

۸-۵- سیال رولین ـ اریکسن

اگر در معادله (۸-۱۴) تنها تعداد محدودی از تانسورهای رولین ـ اریکسن (به عنوان آرگیومنت‌های[۹] f موجود باشند) آن‌گاه سیال، به عنوان رولین ـ اریکسن شناخته می‌شود. در حقیقت، **سیال تراکم‌ناپذیر رولین ـ اریکسن، با پیچیدگی**[۱۰] n توسط معادله بنیادین زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n), \qquad (۸\text{-}۱۵)$$

---

۶. این، محدودیت دشواری است. به عنوان مثال تنش واهلش Stress relaxation (که دارای یک انقطاع در سابقه تغییر شکل‌اش می‌باشد) از این حوزه حذف می‌شود.

۷. یا می‌توان $\mathrm{tr}A_1=0$ را به عنوان بخشی از تعریف سیال ساده تراکم‌ناپذیر تلقی کرد.

۸. Material frame برای بحثی پیرامون اصل بی‌تفاوتی چهارچوب مادی، صفحه ۴۴ فرهنگنامه فیزیک Vol. III/3 را ببینید.

9- Arguments

10- Complexity

در حالت خاص، **مایع رولین ـ اریکسن به پیچیدگی ۲** توسط رابطه زیر داده می‌شود[۱۱] (با $A_1^2 \equiv A_1A_1$ وغیره)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_1\mathbf{A}_1 + \mu_2\mathbf{A}_1^2 + \mu_3\mathbf{A}_2 + \mu_4\mathbf{A}_2^2 + \mu_5(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \mu_6(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1) + \mu_7(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2) + \mu_8(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2), \tag{۸-۱۶ الف}$$

که μ_2 و μ_1، ... و μ_8 توابع عددی ماده از پایاهای عددی زیر هستند:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^3,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2^2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_2^3,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2,\ \mathrm{tr}\,\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2. \tag{۸-۱۶ ب}$$

توجه کنید که اگر $\mu_2 = \mu_3 = ... \mu_8 = 0$ و ثابت = μ_1، معادله (۸-۱۶ الف) به معادله بنیادین برای یک مایع نیوتنی با چسبندگی μ_1 تقلیل می‌یابد.

حالت خاص مهم دیگر، «**سیال مرتبه دو**» است که با معادله بنیادین زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_1\mathbf{A}_1 + \mu_2\mathbf{A}_1^2 + \mu_3\mathbf{A}_2. \tag{۸-۱۷}$$

که در آن، μ_1, μ_2 و μ_3 ثابتهای ماده هستند.

مثال ۸-۶

برای یک سیال مرتبه دو، مؤلفه‌های تنش را در یک جریان برشی ساده با میدان سرعت زیر محاسبه کنید.

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

حل: از مثال ۸-۳، برای جریان برشی داریم:

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

۱۱. در عمل، معادله (۸-۱۶) نتیجهٔ قضیه عرضه (یا ارائه) (Presentation theorem) می‌باشد که مبین متقارن بودن $\mathbf{A}_2$، $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{f}$، است، و عمومی‌ترین شکل چندجمله‌ای $\mathbf{f}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$ تحت قید معادله (۸-۱۴ ب)، آن است که در معادلات (۸-۱۶ الف) و (۸-۱۶ ب) داده شده‌است.

و:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \cdots = 0.$$

حال:

$$[\mathbf{A}_1{}^2] = [\mathbf{A}_1][\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین از معادله (۸-۱۷) داریم:

$$T_{11} = -p + \mu_2 k^2.$$

$$T_{22} = -p + \mu_2 k^2 + 2\mu_3 k^2.$$

$$T_{33} = -p.$$

$$T_{12} = \mu_1 k.$$

$$T_{13} = T_{23} = 0.$$

می‌بینیم که به خاطر وجود μ_2 و μ_3، حضور تنشهای عمودی علاوه بر P، روی صفحات ثابت = x_1 و ثابت = x_2، برای حفظ جریان برشی لازم است. علاوه بر این، مؤلفه‌های تنش عمودی برابر نیستند. تفاوتهای تنش عمودی $\sigma_1(k) \equiv T_{22}-T_{33}$ و $\sigma_2(k) \equiv T_{11}-T_{33}$ به عنوان توابع تنش عمودی شناخته می‌شوند که برای یک سیال نیوتنی صفر می‌باشند. برای یک سیال مرتبه دو:

$$\sigma_2(k) = \mu_2 k^2.$$

$$\sigma_1(k) = \mu_2 k^2 + 2\mu_3 k^2.$$

با اندازه‌گیری تفاوتهای تنش عمودی و مؤلفه‌های تنش برشی T_{12} سه ثابت ماده محاسبه می‌شوند. این سه ثابت، یک مشخصه کافی برای یک سیال ساده (اگر k بیش از حد بزرگ نباشد) را تشکیل می‌دهند.

مثال ۸-۷

برای جریان برشی ساده مثال قبل، پایاهای عددی معادله (۸-۱۶ ب) ر محاسبه کنید.

حل: چون:

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{A}_1]^2 = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_1{}^3] = \begin{bmatrix} 0 & k^3 & 0 \\ k^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_2]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{A}_2]^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8k^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_1]\,[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2k^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_1{}^2\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2{}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 4k^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_1{}^2\mathbf{A}_2{}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}_1{}^2 = 2k^2,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_1{}^3 = 0,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_2 = 2k^2,$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{A}_2{}^2 = 4k^4,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_2{}^3 = 8k^6,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = 0,$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{A}_1{}^2\mathbf{A}_2 = 2k^4,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2{}^2 = 0,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}_1{}^2\mathbf{A}_2{}^2 = 4k^6,$$

مثال ۸-۸

در یک جریان برشی ساده، مؤلفه‌های تنش را برای مایع رولین ـ اریکسن محاسبه کنید.

حل: از معادلات (۸-۱۶) و نتایج مثال قبل داریم (توجه شود: $\mathbf{A}_3=\mathbf{A}_4=\ldots=0$):

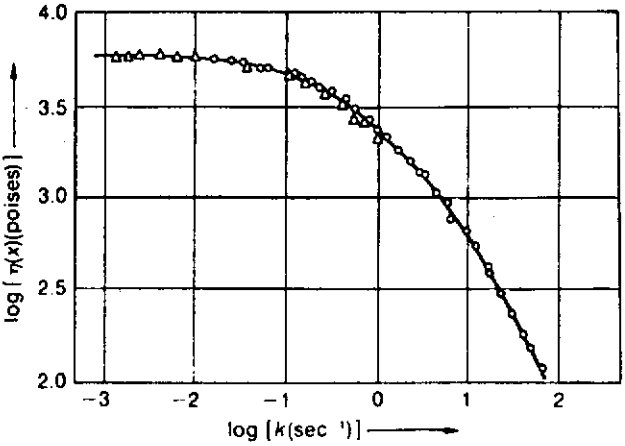
$$T_{11} = -p + k^2[\mu_2(k^2)] \equiv -p + \sigma_2(k^2),$$
$$T_{22} = -p + 2k^2[\mu_3(k^2) + \tfrac{1}{2}\mu_2(k^2) + 2\{\mu_4(k^2) + \mu_7(k^2)\}k^2 + 4k^4\mu_8(k^2)] = -p + \sigma_1(k^2),$$
$$T_{33} = -p,$$
$$T_{12} = k[\mu_1(k^2) + 2k^2\mu_5(k^2) + 4k^4\mu_6(k^2)] = k\eta(k^2) \equiv s(k),$$
$$T_{23} = T_{13} = 0,$$

که $\mu_1(k^2)$ نمایشگر تابع μ_1 می‌باشد، وغیره. تفاوتهای تنش عمودی عبارت‌اند از:

$$T_{22} - T_{33} = \sigma_1(k^2),$$

$$T_{11} - T_{33} = \sigma_2(k^2).$$

نتایج فوق، بیان‌می‌کند که توابع عمودی σ_1 و σ_2 توابع زوج[۱۲] از k (=نرخ برش) است، حال آن که تابع تنش برشی $s(k)$ یک تابع فرد[۱۳] از k می‌باشد. شکلهای ۸-۳ و ۸-۴ برخی از نتایج تجربی σ_1، σ_2 و $\eta(k)$ را نشان می‌دهند، که $\eta(k)\equiv s(k)/k$ به عنوان تابع چسبندگی یا چسبندگی آشکار[۱۴] شناخته می‌شود. موادی نظیر دکالین[۱۵] با ۱۳٪ حلال پلی‌ایزوبوتیلین[۱۶] (که برای آنها تابع چسبندگی $\eta(k)$ با نرخ برش کاهش می‌یابد) توسط رئولوژیستها[۱۷] به عنوان شبه‌پلاستیک[۱۸] شناخته می‌شوند. برای یک مایع نیوتنی، تابع چسبندگی ثابت است. برای جریان برشی ساده (که در مثالهای قبل لحاظ شد) می‌بینیم که همه تانسورهای رولین-اریکسن به‌جز A_1 و A_2 صفر هستند و این که تنها سه تابع مادی $\sigma_1(k)$، $\sigma_2(k)$، و $\eta(k)$ برای مشخص ساختن ماده لازم‌اند. در بخش بعد، یک طبقه کلی از جریانهایی که برای آنها این مطلب صادق است، در نظر خواهیم گرفت. این طبقه از جریانها، به عنوان جریان ویسکومتریک شناخته می‌شوند.



12- Even

13- Odd

14- Apparent viscosity

15- Decalin

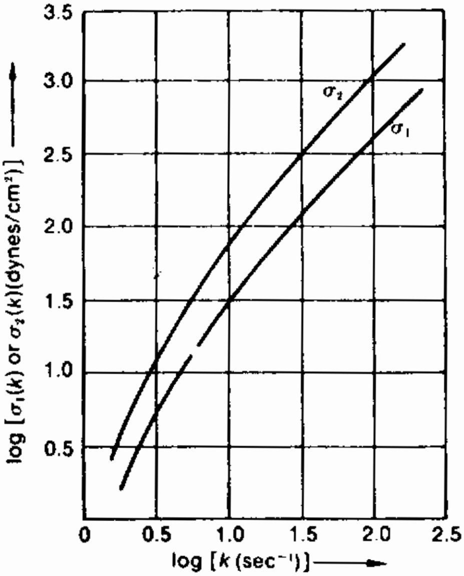
16- Polyisobutylene

17- Rheologists

18- Pseudo-plastic

شکل ۸-۳: منحنی η برای یک حلال ۱۳٪ از پلی‌ایزوبوتیلن در دکالین. داده‌ها با استفاده از ویسکومترهای مخروط و ورق با $\alpha=2°(\Delta)$ و $\frac{1}{2}°(O)$ به دست آمده‌اند.

Markovitz, Elyosh, Paden, and Dewitt [1955], From "Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids." by Coleman, Markovitz and noll, New York, Springer Tracts in Narural Philosophy, Vol. 5, 1966.



شکل ۸-۴: نمودار توابع تنش عمودی σ_1 و σ_2، برای یک حلال ۵/۴٪ از پلی‌ایزوبوتیلن در ستان
Markovitz and Brown [1965]. From "Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids" by Coleman. Markovitz, and Noll. New York: *Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol. 5, 1966.*

۸-۶- جریانهای ویسکومتریک سیال ساده تراکم‌ناپذیر

برای جریان برشی ساده و پایدار:

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad k = \text{ثابت}$$

نتیجه مثال ۸ـ۳ نشان می‌دهد که تانسورهای رولین ـ اریکسن عبارت‌اند از:

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و تمامی $\mathbf{A}_3$، $\mathbf{A}_4$، $\mathbf{A}_5$ ... صفر هستند.

بنابراین، در یک جریان برشی ساده، از یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2). \qquad (۱۸-۸)$$

فرض کنید $\mathbf{N}$ تانسوری است که ماتریس آن، نسبت به مبناهای دکارتی عبارت باشد از:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۱۹-۸)$$

آن‌گاه، به‌سادگی اثبات می‌شود که:

$$\mathbf{A}_1 = k(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T), \qquad (۲۰-۸)$$
$$\mathbf{A}_2 = 2k^2\mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

توجه کنید که نتایج فوق،برای جریان یک‌جهته ($v_3=0$، $v_2=0$ و $v_1=v(x_2)$) نیز کاربرد دارد. همچنین (به هر حال، $k\equiv dv/dx_2$)، از مثال ۸ـ۴، برای میدان جریان با تقارن محوری، با مؤلفه‌های سرعت دکارتی زیر

$$v_1 = v(r), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad r^2 = x_2{}^2 + x_3{}^2. \qquad (۲۱-۸)$$

با توجه به $\cos\theta = x_2/r$ و $\sin\theta = x_3/r$، تانسورهای رولین ـ اریکسن عبارت‌اند از:

$$[\mathbf{A}_1] = k(r)\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۲۲-۸)$$

$$[\mathbf{A}_2] = 2k^2(r)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix},$$

و بقیه ... و ۵ و ۴ و ۳ = n و ۰ = A_n

بنابراین، در این میدان جریان (با تقارن محوری از یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر) داریم:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2).$$

فرض کنید $\mathbf{N}$ تانسوری باشد که ماتریس آن نسبت به مبنای دکارتی $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ عبارت باشد از:

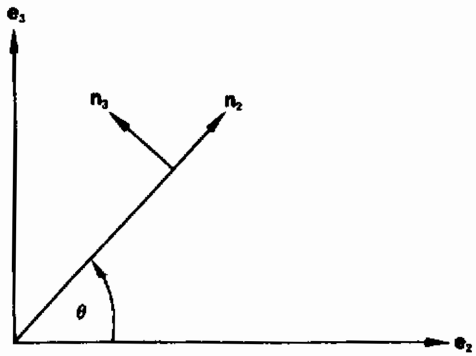
$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۸-۲۳)$$

به سادگی می‌توان اثبات نمود که:

$$\mathbf{A}_1 = k(r)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T), \qquad (۸-۲۴)$$

$$\mathbf{A}_2 = 2k^2(r)\mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

دیده می‌شود که در این‌جا $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ همان شکلی را دارند که جریان برشی ساده. در حقیقت، اگر



شکل ۸-۵

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ مبناهایی باشند که توسط روابط زیر، با $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ مرتبط می‌شوند

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{n}_2 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_2 + \sin\theta\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{n}_3 &= -\sin\theta\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3, \end{aligned} \qquad (۸-۲۵)$$

آن‌گاه، نسبت به مبناهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ و $\mathbf{n}_3$ ماتریس $\mathbf{N}$ عبارت است از:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

یعنی:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

این، نظیر معادله (۸-۱۹) برای جریان برشی ساده‌می‌باشد. به‌عبارت دیگر، جریان با تقارن محوری (که لحاظ شد) لزوماً ی جریان برشی ساده است، یعنی، برای یک المان داده‌شده، اگر فردی خود را به طور صحیحی جهت دهد [بر طبق معادله (۸-۲۵)] درخواهدیافت که المان تحت حالت برش ساده است.

دو مثال فوق، متعلق به جریانهایی هستند که به عنوان **جریان ویسکومتریک پایدار**[19] معروف‌اند و می‌توان آنها را به عنوان جریانی تعریف نمود که برای آنها، تمامی تانسورهای رولین ـ اریکسن حذف می‌شوند، به استثنای A_1 و A_2:

$$\mathbf{A}_1 = k(\mathbf{N}+\mathbf{N}^T),$$
$$\mathbf{A}_2 = 2k^2\mathbf{N}^T\mathbf{N}, \qquad (۲۶-۸)$$

که در آن، k در حال کلی، تابع موقعیت است و ماتریس N نسبت به یک مبنای انتخابی صحیح (در حالت کلی، دوار) عبارت است از:[20]

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۲۷-۸)$$

۸-۷- تنش در جریان ویسکومتریک یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر

برای یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر ـ در یک جریان ویسکومتریک ـ از تعریف داده‌شده در بخش قبل داریم:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}+\mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2), \qquad (۲۸-۸)$$

که تانسورهای رولین ـ اریکسن A_1 و A_2 به صورت زیر قابل نمایش‌اند:

$$\mathbf{A}_1 = k(\mathbf{N}+\mathbf{N}^T),$$

$$\mathbf{A}_2 = 2k^2\mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

19- steady viscometric flow

۲۰. برای این که معادله (۸-۲۷) امکان‌پذیر باشد، تانسور N باید دارای خواص $N^2=0$ و $trN=0$ ، $trN^TN^2=1$ باشد.

و ماتریس $\mathbf{N}$ نسبت به یک مبنای انتخابی، عبارت است از:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_n .$$

علاوه بر این، معادله (۸-۱۴ ب) می‌طلبد که برای تمام تانسورهای متعامد $\mathbf{Q}$،

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\mathbf{Q} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_2\mathbf{Q}). \qquad (۸-۲۹)$$

باشد. اگر $\mathbf{Q}$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که:

$$[\mathbf{Q}]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

آن‌گاه:

$$[\mathbf{Q}]^T[\mathbf{N}]\,[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{N}].$$

همچنین:

$$[\mathbf{Q}^T]\,[\mathbf{N}^T\mathbf{N}]\,[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{N}^T\mathbf{N}].$$

یعنی برای انتخاب $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{N}\mathbf{Q} = \mathbf{N}$$

و:

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{N}^T\mathbf{N})\mathbf{Q} = \mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

بنابراین:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q} = k\mathbf{Q}^T(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T)\mathbf{Q} = k(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) = \mathbf{A}_1$$

و:

$$Q^T A_2 Q = 2k^2 Q^T (N^T N) Q = 2k^2 N^T N = A_2.$$

حال، برای این Q خاص، از معادله (۸ـ۲۹) داریم:

$$Q^T T Q = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(Q^T A_1 Q, Q^T A_2 Q),$$

$$Q^T T Q = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(A_1, A_2),$$

یعنی:

(الف) $$Q^T T Q = T.$$

اما:

$$[Q^T T Q]_{n_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & -T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & -T_{23} \\ -T_{31} & -T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{n_i}.$$

بنابراین، از معادله (الف)، نسبت به مبنای $\mathbf{n}_i$:

$$T_{13} = 0, \quad T_{23} = 0,$$

و نسبت به همین مبنا، A_1 و A_2 تنها وابسته به k می‌باشند، لذا، مؤلفه‌های غیرصفر تنش عبارت‌اند از $T_{22}=-p+\beta(k)$ و $T_{11}=-p+\alpha(k)$ و $T_{12}=s(k)$ و $T_{33}=-p+\gamma(k)$ یا بدان گونه که متداول است: اگر فرض کنیم $\sigma_1(k)\equiv\beta-\gamma$ و $\sigma_2(k)\equiv\alpha-\gamma$، آن‌گاه دستگاه تنش در یک جریان ویسکومتریک ـ یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر ـ نسبت به مبنای $\mathbf{n}_i$ به شکل زیر است که برای آن:

$$[N]_{n_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(۸ـ۳۰)
$$T_{12} = s(k), \qquad T_{13} = T_{23} = 0,$$
$$T_{22} - T_{33} = \sigma_1(k),$$
$$T_{11} - T_{33} = \sigma_2(k).$$

تابع $s(k)$ تابع تنش برشی و تابع $\sigma_2(k)$ و $\sigma_1(k)$ توابع تنش عمودی خوانده می‌شوند. این توابع هنگامی که

از آزمایشات روی یک جریان ویسکومتر یک یک سیال به دست می‌آیند، خواص سیال را در هر جریان ویسکومتریک دیگر کاملاً معین می‌کنند.

می‌توان نشان داد که (مساله ۸-۱۲ را ببینید):

$$s(-k) = -s(k), \qquad (۳۱-۸)$$

$$\sigma_1(-k) = \sigma_1(k),$$

و

$$\sigma_2(-k) = \sigma_2(k).$$

یعنی، s یک تابع فرد[21] از k است، حال آن که σ_1 و σ_2 توابع زوج k می‌باشند.

۸-۸- جریان برشی ساده

با $v_1=kx_2$، $v_2=0$، $v_3=0$، ثابت = k، مؤلفه‌های شتاب همگی صفر می‌شوند.بنابراین، در غیاب نیروی حجمی، معادلات حرکت می‌شوند:

$$0 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3},$$

$$0 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3},$$

$$0 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}.$$

برای یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر در این جریان، مبنای $\mathbf{n}_i$، که برای آن:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان مبنای $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ خواهدبود، بنابراین نسبت به $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$T_{13} = T_{23} = 0 \quad T_{12} = s(k), \quad T_{11} = T_{33} + \sigma_2(k), \quad T_{22} = T_{33} + \sigma_1(k),$$

21- Odd function

به طوری که معادله حرکت می‌شود:

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial x_1} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_2} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0.$$

به عبارت دیگر، جریان به لحاظ دینامیکی، وقتی امکان‌پذیر است که ثابت = T_{33}.

اگر سیال بین دو ورق به فاصله d از یکدیگر قرار گرفته باشد (که یک ورق ثابت و دیگری با سرعت ثابت v در صفحه ورق حرکت کند) آن‌گاه $k=v/d$ و تابع تنش برشی $s(k)$ را می‌توان توسط اندازه‌گیری تنش برشی (موردنیاز برای حفظ جریان پایدار در مقادیر متفاوت ثابت k) به دست آورد. همچنین با اندازه‌گیری تفاوتهای تنشهای عمودی (T_{11}-T_{33} و T_{22}-T_{33}) در همان آزمایش، توابع تنش عمودی $\sigma_1(k)$ و $\sigma_2(k)$ را می‌توان معین نمود.

برای یک سیال نیوتنی نظیر آب، اندازه‌گیریهایی فوق خواهند داد:

$$s(k) = \mu k, \tag{۳۲-۸}$$

$$\sigma_1(k) = 0,$$

$$\sigma_2(k) = 0.$$

یعنی، تابع تنش برشی، یک تابع خطی از k است و تفاوتی بین تنشهای عمودی وجود ندارد. برای یک سیال غیرنیوتنی ـ نظیر محلولهای پلی‌مری ـ برای k کوچک، توابع‌ویسکومتریک را می‌توان توسط چند جمله محدود ـ از بسط سری تیلور ـ تخمین و تقریب زد. با توجه به این که s تابع فرد k است، داریم:

$$s(k) = \mu k + \mu_1 k^3 + \cdots \tag{۳۳-۸}$$

و با عنایت به این که σ_1 و σ_2 توابع زوج k می‌باشند، داریم:

$$\sigma_1(k) = s_1 k^2 + \ldots, \tag{۳۴-۸}$$

$$\sigma_2(k) = s_2 k^2 + \ldots. \tag{۳۵-۸}$$

چون انحراف از رفتار نیوتنی [معادله (۸-۳۲) را ببینید] از مرتبه k^2 برابر σ_1 و σ_2 می‌باشد، و از مرتبه k^3 برابر s، انتظار می‌رود که انحراف تنشهای عمودی، خود را در محدودهٔ k آشکار سازد (که در آن، پاسخ و واکنش تنش برشی، لزوماً همانند یک سیال نیوتنی باقی می‌ماند).

۸-۹- جریان در کانال

حال ما جریان برشی پایدار را بین دو ورق ثابت موازی و بی‌نهایت طویل در نظر می‌گیریم:

یعنی:

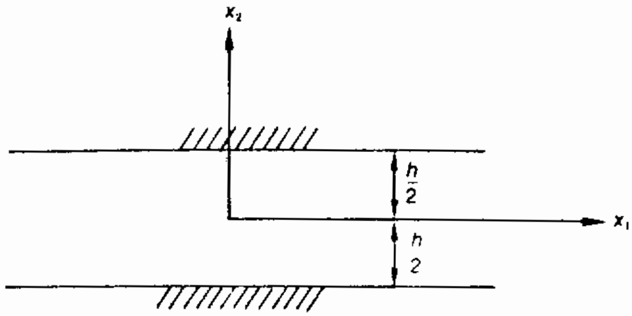
$$v_1 = v(x_2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

با

$$v\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0. \tag{۸-۳۶}$$

مجدداً، برای یک سیال ساده تراکم‌ناپذیر در این جریان، مبنای $\mathbf{n}_i$ که برای آن:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۸-۶

همان مبنای دکارتی $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ است. بنابراین، نسبت به مبنای $\mathbf{e}_i$ (با $k(x_2) \equiv dv/dx_2$) مؤلفه‌های تنش عبارت‌اند از:

$$T_{12} = s(k), \quad T_{13} = T_{23} = 0.$$

$$T_{11} = T_{33} + \sigma_2(k), \quad T_{22} = T_{33} + \sigma_1(k). \tag{۸-۳۷}$$

با قراردادن معادله فوق در معادله حرکت، در غیاب نیروهای حجمی به دست می‌آید:

$$0 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}, \tag{۸-۳۸الف}$$

$$0 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_2} + \frac{d\sigma_1}{dx_2} \tag{۸-۳۸ب}$$

$$0 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}. \tag{۸-۳۸پ}$$

از معادلات (۸-۳۸ ب) و (۸-۳۸ پ)، $\partial T_{33}/\partial x_1$ مستقل از x_2 و x_3 بوده، از معادله (۸-۳۸ الف)، داریم:

$$\frac{dT_{12}}{dx_2} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_1}.$$

چون طرف چپ این معادله، تنها وابسته به x_2 است، بنابراین، ثابت = $\partial T_{33}/\partial x_1$. فرض کنید که $\partial T_{33}/\partial x_1$ با f نشان داده شود. حال $dT_{12}/dx_2=-f$ و از آن جا:

$$T_{12} = -fx_2 + C.$$

با توجه به شرط تقارن، $T_{12}=0$ در $x=0$ است. بنابراین:

$$C = 0$$

و:

$$T_{12} = -fx_2.$$

چون $T_{12}=s(k)$ و اگر $\lambda(s)$ معکوس $s(k)$ فرض شود [به عنوان مثال، اگر $s(k)=\mu k$، آن گاه $\lambda(s)=s/\mu$]. ما $\lambda(s)$ را تابع نرخ برش می‌نامیم. از $s(k)=-fx_2$ به دست می‌آید:

$$k = \lambda(-fx_2),$$

یعنی:

$$\frac{dv}{dx_2} = \lambda(-fx_2),$$

که از آن، پروفیل سرعت به دست می‌آید:

$$v(x_2) = \int_{-h/2}^{x_2} \lambda(-fx)\,dx, \tag{۸-۳۹}$$

که $\lambda(s)$ یک تابع معلوم ماده برای یک سیال خاص فرض شده‌است (که از جریان ویسکومتریک حاصل می‌شود).

فرض کنید که Q نرخ تخلیه حجمی بر واحد طول در جهت x_3 و در امتداد سطح مقطعی از کانال باشد، آن گاه:

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} v(x)\,dx.$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌دهد:

$$Q = xv(x)\Big]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} xv'(x)\,dx,$$

که:

$$v'(x) \equiv k(x).$$

با توجه به اینکه $v(\pm h/2)$ و $dv/dx=\lambda(-fx)$، داریم:

$$Q = -\int_{-h/2}^{h/2} x\lambda(-fx)\,dx.$$

برای یک سیال نیوتنی $s(k)=\mu k$، و $k=s/\mu=\lambda(s)$. بنابراین: $\lambda(-fx) = -fx/\mu$

$$v(x_2) = \int_{-h/2}^{x_2} -\frac{fx}{\mu}\,dx = -\frac{f}{\mu}\frac{x^2}{2}\Big]_{-h/2}^{x_2} = -\frac{f}{\mu}\left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right] \qquad (۸-۴۰)$$

و

$$Q = -\int_{-h/2}^{h/2} x\left(\frac{-fx}{\mu}\right)dx = \frac{f}{\mu}\frac{x^3}{3}\Big]_{-h/2}^{h/2} = \frac{fh^3}{12\mu}. \qquad (۸-۴۱)$$

واضح است که اگر $s(k)$ به طور خطی متناسب با k نباشد، پروفیل سرعت یک سهمی[۲۲] نخواهدبود و تخلیه حجم، به طور خطی وابسته به ثابت $f(dT_{33}/dx_1)$ نمی‌باشد.

مسائل

۸-۱– برای میدان سرعت زیر، (الف) با استفاده از زمان جاری ـ به عنوان زمان مرجع ـ حرکت ذره را به دست آورید، و (ب) تانسور تغییر شکل نسبی را بیابید:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v(x_1), \quad v_3 = 0.$$

۸-۲– مساله ۸ ـ ۱ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = v(r), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

۸-۳– مساله ۸ ـ ۱ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = -kx_1, \quad v_2 = kx_2, \quad v_3 = 0.$$

۸-۴– با استفاده از $C_t(x,\tau)$ در مثال ۸ ـ ۲، تانسورهای رولین ـ اریکسن را با محاسبه پیدا کنید.

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial \tau}\right)_{\tau=t} \quad و \quad \left(\frac{\partial^2 C_t}{\partial \tau^2}\right)_{\tau=t}.$$

22- Parabola

۸-۵– مساله ۸-۴ را برای $C_t(x,\tau)$ از مثال ۸-۴ انجام دهید.

۸-۶– نشان دهید که (مثال ۸-۵ را ببینید):

$$\frac{D^3}{Dt^3}(ds^2) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_3\, d\mathbf{x},$$

که در آن:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{D}{Dt}\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{A}_2.$$

۸-۷– تانسورهای رولین-اریکسن را با استفاده از معادلات (۸-۱۱ الف) و (۸-۱۱ ب) برای میدان سرعت زیر به دست آورید:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v(x_1), \quad v_3 = 0.$$

۸-۸– مساله ۸-۷ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = -y\omega(r), \quad v_2 = x\omega(r), \quad v_z = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

۸-۹– مساله ۸-۷ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = w(r), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

۸-۱۰– سه تانسور اول رولین-اریکسن را برای میدان سرعت زیر به دست آورید، از معادلات (۸-۱۱ الف) و (۸-۱۱ ب) و نتایج مساله ۸-۶ استفاده کنید.

$$v_1 = -kx_1, \quad v_2 = kx_2, \quad v_3 = 0.$$

۸-۱۱– مساله ۸-۱۰ را برای میدان سرعت زیر انجام دهید:

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = kx_1, \quad v_3 = 0.$$

۸-۱۲– فرض کنید $\mathbf{Q}$ تانسوری باشد که ماتریس آن نسبت به مبنای $\mathbf{n}_i$ عبارت است از:

$$[\mathbf{Q}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(الف) روابط زیر را برای تانسور $\mathbf{N}$ ثابت کنید [ماتریس آن نسبت به $\mathbf{n}_i$ توسط معادله (۸-۲۷) داده می‌شود]:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{N}\mathbf{Q} = -\mathbf{N} \quad \text{و} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{N}^T\mathbf{N}\mathbf{Q} = \mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

(ب) برای $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ [داده‌شده توسط معادله (۸-۲۶)] روابط زیر را ثابت کنید:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q} = -\mathbf{A}_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_2\mathbf{Q} = \mathbf{A}_2.$$

(پ) از $\mathbf{T}(k)=-p\mathbf{I}+\mathbf{f}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$، که $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ توسط معادله (۸-۲۶) داده می‌شود و:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{f}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)\mathbf{Q}=\mathbf{f}(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q},\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_2\mathbf{Q}).$$

نشان دهید که:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{T}(k)\mathbf{Q}=\mathbf{T}(-k).$$

(ت) با استفاده از نتایج بند (پ)، نشان دهید که توابع ویسکومتریک دارای خواص زیرند:

$$s(k)=-s(-k),$$
$$\sigma_1(k)=\sigma(-k),$$
$$\sigma_2(k)=\sigma(-k).$$

۸-۱۳ – تنها تانسورهای غیرصفر رولین - اریکسن برای میدان سرعت مساله ۸-۸ داده شده‌اند:

$$[\mathbf{A}_1]_{e_i}=k(r)\begin{bmatrix}-2\dfrac{xy}{r^2} & \dfrac{x^2-y^2}{r^2} & 0\\ \dfrac{x^2-y^2}{r^2} & 2\dfrac{xy}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_2]_{e_i}=2k^2(r)\begin{bmatrix}\dfrac{x^2}{r^2} & \dfrac{xy}{r^2} & 0\\ \dfrac{xy}{r^2} & \dfrac{y^2}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

که $k(r)=r(d\omega/dr)$. ثابت کنید که:

$$\mathbf{A}_1=k(\mathbf{N}+\mathbf{N}^T),$$
$$\mathbf{A}_2=2k^2\mathbf{N}^T\mathbf{N},$$

که:

$$[\mathbf{N}]_{e_i}=\begin{bmatrix}-\dfrac{xy}{r^2} & -\dfrac{y^2}{r^2} & 0\\ \dfrac{x^2}{r^2} & \dfrac{xy}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

۸-۱۴ – برای تانسور $\mathbf{N}$ از مساله قبل، (الف) ثابت کنید $\mathbf{NN}=0$، $\mathrm{tr}\mathbf{N}=0$، $\mathrm{tr}\mathbf{N}^T\mathbf{N}=1$ و (ب) مبنای $\mathbf{n}_i$ را به گونه‌ای بیابید که:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

۸-۱۵ - تنها تانسورهای غیرصفر رولین - اریکسن برای میدان سرعت مساله ۸ - ۹ داده شده‌اند:

$$[\mathbf{A}_1]_{\mathbf{e}_i} = k(r) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{x}{r} \\ 0 & 0 & \frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_2]_{\mathbf{e}_i} = 2k^2(r) \begin{bmatrix} \frac{x^2}{r^2} & \frac{xy}{r^2} & 0 \\ \frac{xy}{r^2} & \frac{y^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(الف) تانسور $\mathbf{N}$ را به گونه‌ای بیابید که:

$$\mathbf{A}_1 = k(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T)$$

و

$$\mathbf{A}_2 = 2k^2\mathbf{N}^T\mathbf{N}.$$

(ب) مبنای $\mathbf{n}_i$ را طوری بیابید که:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ضمیمه: ماتریسها

ماتریس

یک ماتریس، نوعی آرایش مستطیل شکل از عناصر یا اعضای خود است. ماتریس زیر، یک ماتریس با m سطر و n ستون می‌باشد:

(۱)

$$T = \begin{bmatrix} T_{11}, & T_{12}, \ldots, & T_{1n} \\ T_{21}, & T_{22}, \ldots, & T_{2n} \\ T_{m1}, & T_{m2}, \ldots, & T_{mn} \end{bmatrix}.$$

پس $m \times n$ عنصر در ماتریس فوق وجود دارد. نخستین شاخص در هر عنصر به ردیفی که آن عضو در آن جا واقع شده اشاره دارد و شاخص دوم به ستون اشاره دارد. بنابراین، T_{32} در ردیف سوم و ستون دوم ماتریس واقع شده‌است. به طور کلی، T_{ij} عنصری در ردیف iام و ستون jام است. ماتریس معادله (۱) توسط عبارت زیر نشان داده می‌شود.

(۲)

$$T = [T_{ij}] \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, m \\ j &= 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

هرگاه لازم باشد، نمادگذاری $T^{m \times n}$ را برای بیان این که در ماتریس T، m ردیف و n ستون وجود دارد، به کار خواهیم برد.

برگردان یک ماتریس

فرض کنید $S^{n\times m}=[Sij]$ ماتریسی با n ردیف و m ستون باشد. اگر $S_{ij}=T_{ji}$، آن گاه S برگردان T نامیده شده، و توسط T_S نمایش داده می‌شود.

به عنوان مثال، اگر:

$$T^{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

آن‌گاه:

$$S^{3\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=T^T.$$

ماتریس مربع

ماتریسی با تعداد ردیف و ستون برابر، یک ماتریس مربع گفته می‌شود. به عنوان مثال:

$$T=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربع از مرتبه سه می‌باشد. T_{11}، T_{22}، T_{33} عناصر قطری خوانده می‌شوند. بقیه عناصر را اعضای غیرقطری گویند.

ماتریس متقارن

یک ماتریس مربع با خاصیت $T_{ij}=T_{ji}$، یک ماتریس متقارن خوانده می‌شود. مثال:

$$T=\begin{bmatrix}T_{11} & 4 & -1\\ 4 & T_{22} & 2\\ -1 & 2 & T_{33}\end{bmatrix}.$$

توجه کنید که برای یک ماتریس متقارن:

$$T=T^T.$$

ماتریس قطری

یک ماتریس مربع با این خاصیت که تمامی عناصر غیرقطری صفر هستند، یک ماتریس قطری

خوانده می‌شود. مثال:

$$T=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

توجه کنید که ماتریس قطری[1] یک ماتریس متقارن است.

ماتریس عددی

یک ماتریسِ قطری با خاصیت $T_{11}=T_{22}=T_{33}=\alpha$، یک ماتریس اسکالر یا عددی نامیده می‌شود.

مثال:

$$T=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

ماتریس واحد

یک ماتریس عددی با این خاصیت که اجزای قطری همه برابر واحد باشند را ماتریس واحد گویند.

ماتریس واحد را با I نشان می‌دهیم. پس:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

ماتریس ردیفی

ماتریسی با تنها یک ردیف، ماتریس ردیفی[2] گفته می‌شود. برای یک ماتریس ردیفی، تنها یک شاخص برای تعیین مکان یک عنصر یا عضو لازم است. بنابراین:

$$a=[a_1, a_2, a_3]=[a_i]_r,$$

که شاخص a نمایشگر یک ماتریس ردیفی است.

1- Diagonal matrix

2- row matrix

ماتریس ستونی

یک ماتریس با تنها یک ستون، ماتریس ستونی خوانده می‌شود. بنابراین:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_i]_c$$

یک ماتریس ستونی است. توجه کنید که:

$$[a_r]^T = [a_c].$$

عملیات ماتریسها

۱ - اگر $T^{m\times n}=[T_{ij}]$ و $S^{m\times n}=[S_{ij}]$، آن‌گاه T=S، اگر و تنها اگر $T_{ij} = S_{ij}$

۲ - اگر α یک عددی باشد، آن‌گاه

$$\alpha T = T\alpha = [\alpha T_{ij}].$$

مثال:

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

۳- $T^{m\times n} + S^{m\times n} = [T_{ij} + S_{ij}].$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

قواعد زیر، از قواعد عملیات مربوط به عددیها تبعیت می‌کنند:

(قانون جابه‌جایی) $T + S = S + T,$

(قانون شرکت‌پذیری) $T + [S + R] = [T + S] + R = T + S + R,$

$$[\alpha + \beta]T = \alpha T + \beta T,$$

$$\alpha[T + S] = \alpha T + \alpha S.$$

۴ - اگر $T^{m\times n}=[T_{ij}]$ ماتریسی با m ردیف و n ستون باشد و $S^{n\times p}=[S_{ij}]$ ماتریسی با n ردیف و P ستون باشد، آن‌گاه:

$$T^{m\times n}S^{n\times p} = R^{m\times p},$$

که عناصر R توسط رابطه زیر داده می‌شوند:

$$R_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha} S_{\alpha j},$$

مثال

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31}, & T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{32} \\ T_{21}S_{11} + T_{22}S_{21} + T_{23}S_{31}, & T_{21}S_{12} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{32} \end{bmatrix},$$

$$[a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

توجه به این نکته مهم است که تنها وقتی تعداد ستونهای نخستین ماتریس، برابر تعداد ردیفهای ماتریس دوم است، ضرب ماتریس تعریف می‌شود. مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

اما:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف‌نشده است.

مثالهای زیر نشان می‌دهد که حتی اگر هر دو TS و ST تعریف شوند، **در حالت کلی مساوی نیستند.** مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}$$

اما:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

به هر حال، اگر T یک ماتریس عددی باشد، یعنی:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

آن‌گاه:

$$TS = ST.$$

به شرط آن‌که هر دو TS و ST تعریف شوند (یعنی، به شرط آن‌که S نیز یک ماتریس مربع بوده و از

همان مرتبه ماتریس T باشد). به خصوص، اگر S یک ماتریس مربع از همان مرتبه ماتریس واحد I باشد، آن‌گاه:

$$IS = SI = S.$$

می‌توان نشان داد که ضرب ماتریس دارای خواص زیر است:

$$T[SR] = [TS]R,$$
$$\alpha[TS] = [\alpha T]S = T[\alpha S],$$
$$[T+S]R = TR + SR,$$
$$R[T+S] = RT + RS.$$

قاعده عکس برای یک حاصل ضرب برگردانی

در زیر نشان خواهیم داد که برگردان حاصل ضرب ماتریسها برابر حاصل ضرب برگردان آنها و با ترتیب معکوس می‌باشد، یعنی:

$$[TS]^T = S^T T^T.$$

اثبات: داریم:

$$T^{m\times n} = [T_{ij}],$$
$$S^{n\times p} = [S_{ij}],$$
$$[T^{m\times n}S^{n\times p}] = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} T_{i\alpha}S_{\alpha j}\right)^{m\times p},$$

$$[T^{m\times n}S^{n\times p}]^T = [R_{ij}]^{p\times m}$$ که در آن، $$R_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{j\alpha}S_{\alpha i}$$

حال:

$$T^T = [T^T_{ij}]^{n\times m} \quad \text{که} \quad T^T_{ij} = T_{ji}$$

$$S^T = [S^T_{ij}]^{p\times n} \quad \text{که} \quad S^T_{ij} = T_{ji}$$

$$S^T T^T = \left[\sum_{\alpha=1}^{n} S^T_{i\alpha}T^T_{\alpha j}\right]^{p\times m} = \left[\sum_{\alpha=1}^{n} S_{\alpha i}T_{j\alpha}\right] = [R_{ij}]^{p\times m}.$$

یعنی

$$S^T T^T = [TS]^T.$$

معکوس یک ماتریس

ماتریس مربع S معکوس ماتریس مربع T گفته می‌شود اگر:

$$TS = I,$$

که I ماتریس واحد است.

ما S را با T^{-1} نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$TT^{-1} = I.$$

می‌توان ثابت نمود که اگر دترمینان T، یعنی $|T_{ij}|$، برابر صفر نباشد، آن‌گاه معکوس T وجود داشته، و نیز داریم:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I,$$

که T^{-1} منحصر به فرد است. اثبات در این جا ارائه نمی‌شود.

قاعده عکس، برای معکوس حاصل ضرب ماتریسها

در زیر نشان خواهیم داد که معکوس حاصل ضرب ماتریسها، برابر حاصل ضرب معکوس آنها به ترتیب عکس می‌باشد، یعنی:

$$[TS]^{-1} = S^{-1}T^{-1}.$$

اثبات:

$$[TS][S^{-1}T^{-1}] = T[SS^{-1}]T^{-1} = TIT^{-1} = TT^{-1} = I.$$

بنابراین $S^{-1}T^{-1}$ معکوس TS است.

دیفرانسیل‌گیری از یک ماتریس

اگر $T=[T_{ij}]$، که T_{ij} توابع x، y، z باشند، آن‌گاه:

$$\frac{\partial}{\partial x} T \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x} T_{ij}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} T \equiv \left[\frac{\partial}{\partial y} T_{ij}\right] \qquad \text{وغیره}$$

کتابشناسی *

[1] Chung T. J. "Continuum Mechanics", Prentice-Hall Inc., 1988.

[2] Hunter S. C. "Mechanics of Continuous Media", Ellis Horwood Ltd., 1983.

[3] Curtin M. E. "Principle of Continua", John Wiley, 1981.

[4] Fung U. C. "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice-Hall Inc., 1977.

[5] Lee A. Segel "Mathematics Applied to Continuum Mechanics", Macmillan Pub. Co. Inc., 1977.

[6] Chadwick P. "Continuum Mechanics, Concise Theory and Problems", 1976.

[7] Sedov L. I. "A Course in Continuum Mechanics", Wolters - Noordhoff Pub., 1974, 4 Volumes:

Volume 1: Basic Equations and Analytical Techniques.

" 2: Physical Foundations and Formulations of Pdoblem.

" 3: Fluids, Gases and Generation of Thrust.

" 4: Elastic and Plastic Solids and Formation of Cracks.

[8] Oden J. T. "Finite Elements in Nonlinear Continua", McGraw-Hill, 1972.

[9] Mase G. E. "Continuum Mechanics", Schaum's Outline Series, 1970.

---

* در متن کتاب اصلی، هیچ مرجعی معرفی نشده‌است. لذا، برای آشنایی بیشتر دانشجویان، تعدادی از کتابهایی که مستقیماً به موضوع مکانیک محیطهای پیوسته پرداخته‌اند، معرفی شده‌است. با توجه به سابقهٔ نسبتاً دیرینهٔ این شاخهٔ علمی، کتب و مقالات منتشره در این زمینه بسیار زیاد و به بیانی بی‌شمار است. در کتب مندرج در فهرست فوق، به تعدادی از این منابع اشاره شده‌است.(مترجم)

[10] Hodge P. G. Jr. "Continuum Mechanics", McGraw-Hill Co., 1970.

[11] Malvern L. E. "Introduction to the Mechanics of Continuous Medium", Prentice-Hall, 1969.

[12] Leigh D. C. "Nonlinear Continuum Mechanics", McGraw-Hill, 1968.

[13] Scipio L. A. "Principles of Continua", John Wiley, 1967.

[14] Eringer A. C. "Mechanics of Continua", John Wiley, 1967.

[15] Jaunsemis W. "Continuum Mechanics", Macmillan Pub., 1967.

[16] Truesdell C. "The Elements of Continuum Mechanics", Springer-Verlag, 1966.

[17] Fung Y. C. "Coundation of Solid Mechanics", Prentice-Hall, 1965.

[18] Frederick D. & Chang T. S. "Continuum Mechanics", Allyn & Bacon, 1965.

[19] Eringer A. C. "Nonlinear Theory of Continuous Media", Academic Press, 1962.

[20] Long R. R. "Mechanics of Solids and Fluids", Prentice-Hall, 1961.

[21] Prager W. "Introduction to Mechanica of Continua", Gin and Company, 1961.

[22] "Problems of Continuum Mechanics", SIAM, Philadelphia.

[۲۳] فیروزبخش، ک. و فرشاد، م. «مکانیک محیطهای پیوسته، تئوری و کاربرد»، انتشارات دانشگاه شیراز، ۱۳۵۵.

پاسخ مسائل

CHAPTER 2

A1. (a) 5 (b) 28 (c) 28 (d) 23

A2. (a) and (c)

A5. (a) $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0,\ T_{12} = -T_{21} = 0,\ T_{23} = -T_{32} = 1,\ T_{31} = -T_{13} = 2$

(b) $c_1 = 3,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$

B1. (a) $$[\mathbf{T}]_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$ (b) $$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$

B3. $$[\mathbf{mn}]_{\mathbf{e}_i} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B5. $\mathbf{T}$ is not a linear transformation

B6. (b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$ (c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}$$

B13. (a) $$[\mathbf{Q}]_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (b) $$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}'_i} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}'_i}$$

B16. $T'_{11} = \frac{4}{5};\ T'_{12} = -3\sqrt{5};\ T'_{31} = \frac{2}{5}$

B17. (a) $$[T'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ (b) $T_{ii} = T'_{ii} = 2$

$\det[T_{ij}] = \det[T'_{ij}] = -25$

B26. (a)
$$[\mathbf{T}^S] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{T}^A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(b)
$$[\mathbf{t}^A] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B28. Eigenvector of **T** is **n**
Eigenvalue of **T** is $r_i s_i$

B31. (a) $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$

B32. (a)
$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(b) $\mathbf{n} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

B33. (b)
$$[\mathbf{R}^S]_{\mathbf{e}'_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; [\mathbf{R}^A]_{\mathbf{e}'_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $\lambda_1 = \cos\theta;\ \mathbf{n}_1 = \alpha\mathbf{e}'_1 + \beta\mathbf{e}'_2;$
$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ otherwise arbitrary.
$\lambda_2 = \cos\theta;\ \mathbf{n}_2 = -\beta\mathbf{e}'_1 + \alpha\mathbf{e}'_2;$
$\lambda_3 = 1;\quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}'_3$

(d) $R'_{ii} = 2\cos\theta + 1;$ (e) $\mathbf{t}^A = \sin\theta\mathbf{e}'_3$

(f) $\theta = \operatorname{arc\,cos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120°$

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{2\sin\theta} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

B38. (a) $I_1 = 3;\ I_2 = -16;\ I_3 = -48$
$\lambda_1 = 3 \rightarrow \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1$
$\lambda_2 = 4 \rightarrow \mathbf{n}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
$\lambda_3 = -4 \rightarrow \mathbf{n}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

(b)
$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{n}_i} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{\mathbf{n}_i}$$

(c) No, the first invariants are not equal

B42. (a) $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ (b) $|\nabla\varphi| = 2$ (c) $\dfrac{d\varphi}{dr} = \sqrt{2}$

B43. $\mathbf{n} = \left(\dfrac{x}{a^2}\mathbf{e}_1 + \dfrac{y}{b^2}\mathbf{e}_2 + \dfrac{z}{c^2}\mathbf{e}_3\right)\left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

B44. (a) $\mathbf{q} = -3k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$
(b) $\mathbf{q} = -3k(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$

B45. (a) $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\alpha(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2)$ (b) $\mathbf{D} = -\epsilon_1\alpha\cos\theta\mathbf{e}_1 - \epsilon_2\alpha\sin\theta\mathbf{e}_2$
(c) $|\mathbf{D}|^2 = \alpha^2(\epsilon_1{}^2\cos^2\theta + \epsilon_2{}^2\sin^2\theta)$
$|\mathbf{D}|_{\max}$ for $\theta = 0;\ \pi/2;\ 3\pi/2 \ldots$

B48. (a)
$$[\nabla\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix}$$
(b)
$$[(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}] = 2\begin{bmatrix} x^3 \\ y^2 z \\ yz^2 \end{bmatrix}$$

(c) $div\ \mathbf{v} = 2x$ (d) $\mathbf{curl}\ \mathbf{v} = 2(y - z)\mathbf{e}_1$ (e) $d\mathbf{v} = 2ds(x\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_3)$

B49. (b) $\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\max}$ 12

CHAPTER 3

3.1. (a) $\mathbf{v} = k\mathbf{e}_1, \mathbf{a} = 0$ (b) $\frac{D\theta}{Dt} = Ak$ (c) $\frac{D\theta}{Dt} = 0$

3.2. (b) $\mathbf{v} = 2kX_1^2 t\mathbf{e}_2, \mathbf{a} = 2kX_1^2\mathbf{e}_2.$ (c) Use $X_1 = x_1$

3.3. (b) $v_1 = \frac{2ktx_2^2}{(1+kt)^2}, v_2 = \frac{kx_2}{1+kt}, v_3 = 0$ (c) $a_1 = \frac{2kx_2^2}{(1+kt)^2}, a_2 = 0, a_3 = 0$

3.4. (b) $\mathbf{v} = k\mathbf{e}_1, \mathbf{a} = 0$ (c) $\mathbf{v} = \left(\frac{k}{1+t}\right)\mathbf{e}_1, \mathbf{a} = 0$

3.5. (b) $\mathbf{v} = \left(\frac{x_1}{1+t}\right)\mathbf{e}_1$

3.9. (b) $\mathbf{a} = -\frac{1}{4}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 2k$$

3.13. (b) $E'_{11} = k/2$

3.14. (a) Unit elongations: $5k$, $2k$
Decrease in angle: k

3.15. (a) $k/3$

3.16. (a) $\frac{58}{9} \times 10^{-4}$ (b) $\frac{32}{3\sqrt{5}} \times 10^{-4}$

3.19. $\left.\frac{\Delta l}{l}\right]_{\max} = 3 \times 10^{-6}$

3.22. $E_{11} = a, E_{22} = c, E_{12} = b - \frac{1}{2}(a + c)$

3.25. $E_{11} = a, E_{22} = \frac{1}{3}(2b + 2c - a), E_{12} = \frac{b - c}{\sqrt{3}}$

3.28. (b) $3k$

3.29. $\frac{(D/Dt)(ds_1)}{ds_1} = -(k+1), \frac{(D/Dt)(ds_2)}{ds_2} = -\frac{1}{2}(k+1)$

3.36. $k = 1$

3.38. $v_1 = v_1(x_2, x_3), v_2 = 0$

3.39. (a) $\rho = \rho_0/(1 + t)$ (b) $\rho = \alpha/x_1$

3.40. $\rho = \rho_0 e^{-t^2}$

CHAPTER 4

4.1. (a) On $\mathbf{e}_2$, $T_n = 4$ MPa (b) On $\mathbf{e}_3$, $T_s = 5.83$ MPa

4.2. (a) $\mathbf{t} = \frac{1}{3}(5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)$ MPa (b) $T_n = 3$ MPa

$T_s = \sqrt{\frac{5}{3}}$ MPa

4.4. $\mathbf{t} = \frac{100}{4}(\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \sqrt{3}\mathbf{e}_3)$

4.5. $T'_{11} = -6.43$ MPa

$T'_{13} = 18.6$ MPa

4.6. $\mathbf{F} = 4\beta\mathbf{e}_2$
$\mathbf{M} = -(4\alpha/3)\mathbf{e}_3$

4.8. $\mathbf{F} = 4\alpha\mathbf{e}_1$

$\mathbf{M} = -\frac{4}{3}\alpha\mathbf{e}_1$

4.9. (a) $\mathbf{t} = 0$ (b) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 8\pi\alpha\mathbf{e}_1$

4.16. $T_{11} = 1$ MPa
$T_{33} = 1$ MPa

4.18. (a) $T_1 = \tau$, $T_2 = 0$, $T_3 = -\tau$ (b) $T_s]_{max} = \tau$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{n}_1 \pm \mathbf{n}_3) = \mathbf{e}_1 \text{ and } \mathbf{e}_2$$

4.19. $T_s]_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_3)$$

4.21. $T_{12} = 2x_1 - x_2 + 3$

4.22. $T_{33} = (1 + \rho g)x_3 + f(x_1, x_2)$

4.23. Yes

CHAPTER 5

5.4. $E_Y = 207$ GPa (30×10^6 psi), $\nu = 0.30$, $k = 172$ GPa (25×10^6 psi)

5.6. $\nu = 0.27$, $\lambda = 91$ GPa (13.2×10^6 psi), $k = 141$ GPa (20.5×10^6 psi)

5.8.
$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 6.6 & -2.3 & 0 \\ -2.3 & 3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 8.9 \end{bmatrix} \times 10^3\,\text{psi} = \begin{bmatrix} 45.5 & -15.9 & 0 \\ -15.9 & 22.1 & 0 \\ 0 & 0 & 61.4 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

5.10. (a)
$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 3.33 & 1.26 & 0 \\ 1.26 & -1.97 & 0 \\ 0 & 0 & -0.43 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \quad \text{(b) } \Delta V = 4.87 \times 10^{-3}\,\text{cm}^3$$

5.14. (a) $[\mathrm{T}] = k\mu \begin{bmatrix} 0 & 2X_3 & 2X_1+X_2 \\ 2X_3 & 0 & X_1-2X_2 \\ 2X_1+X_2 & X_1-2X_2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) Yes

5.17. c_L/c_T; 2; 7.15; 22.4

5.19. (a) Transverse wave in $\mathbf{e}_3$-direction (b) $c = c_T$ (c) $\alpha = -1$

(d) $\beta = \dfrac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3 \ldots$

5.20. (c) $\alpha = +1$ (d) $\beta = \dfrac{n\pi}{2l}, n = 1, 3, 5 \ldots$

5.21. (c) $\alpha = +1$ (d) $\beta = \dfrac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3 \ldots$

5.22. (a) Longitudinal in $\mathbf{e}_3$-direction (b) $c = c_L$ (c) $\alpha = -1$

(d) $\beta = \dfrac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3 \ldots$

5.27. (a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (b) $\alpha_3 = 31.2°, \epsilon_2/\epsilon_1 = 0.74, \epsilon_3/\epsilon_1 = 0.50$

$\epsilon_2 = \epsilon_1$

$\epsilon_3 = 0$

5.28. $\alpha_1 = 30°$

5.34. (a) $u_1(X_1, t) = \alpha \cos \omega t \left[\cos \dfrac{\omega X_1}{c_L} + \left(\tan \dfrac{\omega l}{c_L}\right) \sin \dfrac{\omega X_1}{c_L}\right]$

(b) $\omega = \dfrac{n\pi c_L}{l}$ $n = 1, 3, 5 \ldots.$

5.37. (a) $\mathbf{u} = \alpha \left[\cos \dfrac{\omega}{c_T} X_1 - \cot \dfrac{\omega l}{c_L} \sin \dfrac{\omega X_1}{c_T}\right][\cos \omega t \mathbf{e}_2 + \sin \omega t \mathbf{e}_3]$

(b) Circular

5.39. (a) $T_n]_{\max} \simeq 11{,}300$ psi (78 MPa) (b) $\Delta l = 3.62 \times 10^{-2}$ inch (9.2×10^{-2} cm)

$T_s]_{\max} = 5{,}650$ psi (39 MPa) $\Delta d = -0.284 \times 10^{-3}$ inch (-0.721×10^{-3} cm

5.40. $\delta = 0.72$ cm

5.45. $P_1 = P/12, P_2 = P/3, P_3 = 7P/12$

5.48. $d = 5.8$ cm

5.49. $d = 3.38$ inch (8.59 cm)

5.51. $M_1 = \dfrac{M_t}{\dfrac{l_1}{l_2}\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^4 + 1}, \; M_2 = \dfrac{M_t}{1 + \dfrac{l_2}{l_1}\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^4}$

5.53. $M_L = M \dfrac{(b+2c)}{(a+b+c)}$

5.54. (b) $T_n]_{\max} = 21.4$ ksi (147 MPa)

$T_s]_{\max} = 16.6$ ksi (114 MPa)

5.62. $d = 10.5$ cm

5.63. $b = 10$ inch (25.4 cm)

5.64. P = 0.21 MN

5.69. (a) Yes (b) $T_{11} = 0, T_{12} = -2\alpha X, T_{22} = 2\alpha, T_{33} = 2\nu\alpha$

(c) on $X_1 = a$: $\mathbf{t} = -2\alpha a \mathbf{e}_2$

$X_2 = b$: $\mathbf{t} = -2\alpha X_1 \mathbf{e}_1 + 2\alpha \mathbf{e}_2$

5.70. (a) If $\alpha = -\beta$

5.71. (a) Yes (b) $T_{11} = 2\alpha X_1, T_{22} = 0, T_{12} = -2\alpha X_2 - 3\beta X_2^2$

(c) $\alpha = -3/2\, \beta b$

CHAPTER 6

6.1. $B = 5.10 \times 10^4$ N

6.2. $p_A = p_0 + \rho(g + a) h$

6.3. $p_A = p_0 + \rho(h' + h)(g + a \sin\alpha)$

$$h' = \frac{a r_0 \cos\alpha}{g + a \sin\alpha} \quad (h + h' = \text{depth of water above } A)$$

6.4. $z = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

6.5. $p = p_0 e^{-\rho_0 g(z - z_0)/p_0}$ for $n = 1$

6.6. (b) $T_n = -p + \mu, T_s = 0$

6.7. (*a*) -4μ, (*b*) 8μ

6.9. $v_1 = \dfrac{(\rho g \sin\theta) d^2}{\mu}\left[\left(\dfrac{x_2}{d}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2}{d}\right)^2\right]$

6.12. (a) $v = A \ln \dfrac{r}{a} + v_a$ (b) $v = \dfrac{\beta}{4}(r^2 - a^2) + A \ln \dfrac{r}{a}$

$A = \dfrac{v_b - v_a}{\ln(b/a)}$ $\beta = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx}, A = \dfrac{\beta(a^2 - b^2)}{4 \ln(b/a)}$

6.14. $A = \dfrac{\beta a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}, B = -A$

6.15. $A = -\dfrac{\beta\sqrt{3}}{6b}, B = 0$

6.17. $\theta = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)^2 (b^4 - x_2^4)/(12\kappa\mu) + \dfrac{(\theta_2 - \theta_1)x_2}{2b} + \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

6.21. (b) $T_{11} - p + 2\mu k, T_{22} = -p - 2\mu k, T_{33} = -p$, remaining $T_{ij} = 0$

(c) $\mathbf{a} = k^2(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$

(d) and (e) $p = -\dfrac{\rho k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + p_0$ (f) $\Phi_{inc} = 4k^2\mu$ (g) No slip

6.22. (b) $T_{11} = -p + 4\mu k x_1$ (c) $a_1 = 2k^2(x_1^3 + x_1 x_2^2)$

$T_{22} = -p - 4\mu k x_1$ $a_2 = 2k^2(x_2^3 + x_1^2 x_2)$

$T_{12} = -4\mu k x_2$

$T_{33} = -p$

$T_{13} = T_{23} = 0$

6.27. $Q = 0.0762\ \text{m}^3/\text{sec}$

6.28. $Q = 3.98\ \text{ft}^3/\text{sec}\ (0.113\ \text{m}^3/\text{sec})$

CHAPTER 7

7.7. (b) $3A\rho_0 e^{-t}, -3A\rho$ (c) $-3A\rho$

7.8. (b) $m = A\rho_0$ (c) $P = \frac{9}{2}\rho_0 A e^{t-t_0}\mathbf{e}_1$

7.11. (a) $\dfrac{4A\rho_0}{(1+t)^2}, -\dfrac{8A\rho_0}{(1+t)^3}$ (b) $\dfrac{8A\rho_0}{(1+t)^3}$ (c) 0

(d) $\dfrac{13}{3}\dfrac{\rho_0}{(1+t)^3}, -\dfrac{13\rho_0}{(1+t)^4}$ (e) $\dfrac{13\rho_0 A}{(1+t)^4}$

7.12. (a) $\frac{9}{2}\rho_0 A e^{-t}\mathbf{e}_1$, $-\frac{9}{2}\rho_0 A e^{-t}\mathbf{e}_1$ (b) $9\rho_0 A e^{-t}\mathbf{e}_1$ (c) $\frac{9}{2}\rho_0 A e^{-t}\mathbf{e}_1$

7.14. $\mathbf{F} = 8\rho(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

$\mathbf{M} = 8\rho(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

7.18. $283\ \left(\dfrac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2\right) N$

7.20. $\rho v_0^2 A$

7.21. $y_2 = -\dfrac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{y_1}{2}\right)^2 + \dfrac{2Q^2}{g y_1}}$

7.24. 612 rad/sec

CHAPTER 8

8.1. $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 + v(x_1)(\tau - t), \xi_3 = x_3$

8.2. $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_3 + v(r)(\tau - t)$

8.3. $\xi_1 = x_1 e^{-k(\tau - t)}, \xi_2 = x_2 e^{k(\tau - t)}, \xi_3 = x_3$

8.7. With $v' \equiv \dfrac{dv}{dx}$

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & v' & 0 \\ v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 2v'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.8. With $\omega' = \dfrac{d\omega}{dr}$

$$[\mathbf{A}_1] = \frac{\omega'}{r}\begin{bmatrix} -2xy & x^2-y^2 & 0 \\ x^2-y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = 2\omega'^2\begin{bmatrix} x^2 & xy & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \cdots = 0$$

8.9. With $w' = \dfrac{dw}{dr}$

$$[\mathbf{A}_1] = \frac{w'}{r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \frac{2w'^2}{r^2}\begin{bmatrix} x^2 & xy & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.10.

$$[\mathbf{A}_1] = 2k\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = 4k^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_3] = 8k^3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.14. (b) $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_\varphi = -\dfrac{y}{r}\mathbf{e}_1 + \dfrac{x}{r}\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_r = \frac{x}{r}\mathbf{e}_1 + \frac{y}{r}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$$

8.15. (a)

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x/r & y/r & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$

$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_r = (x/r)\,\mathbf{e}_1 + (y/r)\,\mathbf{e}_2$

$\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_\varphi = -(y/r)\,\mathbf{e}_1 + (x/r)\,\mathbf{e}_2$

فهرست اعلام و موضوعات